

菊池自由エネルギーに対する CCCP アルゴリズムの拡張

西山 悠¹

東京工業大学総合理工学研究科知能システム科学専攻

1 導入

本稿では、一般のグラフ上で定義された高次元確率分布について、統計量、周辺分布を数値的に計算することを目的とする基本的で重要な問題を取り扱う。統計量、周辺分布を効率的に近似計算する反復アルゴリズムに CCCP に基づく菊池自由エネルギーの最小化アルゴリズムが知られているが [1]，ここではこれを含む一般化したアルゴリズムを与える。このアルゴリズムは確率変数が離散変数、連続変数と問わず、また適用する高次元確率分布の持つ特殊な性質を使わないことから、特に望ましい特別な構造を持たない厄介な高次元確率分布についての有効性が期待される。特殊な構造を持つ確率分布においては、その特殊性を最大限活かしたアルゴリズムの方が良いであろうが、任意の確率分布に適用できる点で見通しが良い 1 つの基盤を与えることができ、(実装上の問題も含めて) 汎用的である。

変数 x_1, \dots, x_d を並べてできるベクトルを \mathbf{x} とし、ベクトル \mathbf{x} 上の d 次元確率分布 $P(\mathbf{x})$ を考える。変数 x_1, \dots, x_d のラベル集合を $\mathcal{V} = \{1, \dots, d\}$ とし、その部分集合 \mathcal{A} によって得られる部分ベクトルを $\mathbf{x}_{\mathcal{A}}$ と表わすことにする。また部分ベクトル $\mathbf{x}_{\mathcal{A}}$ 上の周辺化された確率分布を $P_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_{\mathcal{A}})$ と表わすことにする。このとき、一般に関数 $f(\mathbf{x}_{\mathcal{A}})$ の期待値は

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{x}_{\mathcal{A}})] = \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_{\mathcal{A}}) P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_{\mathcal{A}}} f(\mathbf{x}_{\mathcal{A}}) \sum_{\mathbf{x} \setminus \mathbf{x}_{\mathcal{A}}} P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_{\mathcal{A}}} f(\mathbf{x}_{\mathcal{A}}) P_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_{\mathcal{A}}) \quad (1)$$

で表わされる。式 (1) を数値計算するには確率分布 $P(\mathbf{x})$ の周辺分布 $P_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_{\mathcal{A}})$ を求めれば十分だが、ベクトル \mathbf{x} から部分ベクトル $\mathbf{x}_{\mathcal{A}}$ を取り除いた $\mathbf{x} \setminus \mathbf{x}_{\mathcal{A}}$ が高次元のときでは、確率変数たちの取りうるすべての状態の組み合わせについて和を取らなければならない。これは直接的には計算困難な問題へと変わる。ここに計算量の意味での「More is different」が顔を出し、高次元のときでは、しっかりと考えた洗練された手続き、アルゴリズムを採用しなければならないことになる。確率分布 $P(\mathbf{x})$ が特殊であって、そのグラフ構造がサイクルを含まない場合には、確率分布にサイクルを含まないという仮定のもとで数学的に導出される確率伝搬法 (BP)[2] の手続きを利用することで周辺分布 $P_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_{\mathcal{A}}) = \sum_{\mathbf{x} \setminus \mathbf{x}_{\mathcal{A}}} P(\mathbf{x})$ を効率的に計算することができる。また確率伝搬法が生み出すアルゴリズムは結果的に近接ノードへの局所反復の更新式によって構成されており、グラフがサイクルを含まないという前提の条件は表面上には現れない。これにより、レプリカ法の自然数と仮定しておいて後に実数へ解析接続するというに似た要領で仮定を取り払い、サイクルを含む確率分布に対しても確率伝搬法 (LBP) が適用されている。このとき、数学的な保証は失われ、アルゴリズムの収束は保証されなくなる。また確率伝搬法には、アルゴリズムの固定点が評価関数の停留点に対応する評価関数として、ベータ自由エネルギーが見出されている [3][4]。これにより、周辺分布を計算することは、確率伝搬法をその 1 つとして含んだ、広くベータ自由エネルギーの最適化問題に帰着されることになる。ベータ自由エネルギーを拡張したものに菊池自由エネルギーがある [5]。ベータ自由エネルギーの最小化によって得られる周辺分布 (belief) は、高次元確率分布を表すグラフがサイクルを含むときは真の周辺分布とは一致せずバイアスがかかるが、菊池自由エネルギーの最小化によって計算される belief の方が真の周辺分布に対する近似精度が良いことが知られている。確率伝搬法とベータ自由エネルギーが対になったように、ベータ自由エネルギーを拡張した菊池自由エネルギーに対となる一般化確率伝搬法 (GBP) も提案されており [4]，その有効性が示されている。

サイクルを含む確率分布に適用された確率伝搬法 (LBP) は、本来満たすべき条件を取り払っていることから、数学的には保証がなく収束が保証されないが、ベータ自由エネルギー、菊池自由エネルギーを単調に減少させることを戦略として収束を保証させた CCCP (Concave Convex Procedure) アルゴリズムがある。CCCP アルゴリズムは一般には最小化させたい関数が下に凸 (convex) の関数と上に凸 (concave) の関数の和で書かれているときに、それらの凸性を利用した更新則を与えることで単調減少性を保証するも

¹E-mail: nishiyudesu@cs.pi.titech.ac.jp

のである．具体的には，最小化したい関数が $F(\mathbf{b}) = F_{\text{vex}}(\mathbf{b}) + F_{\text{cave}}(\mathbf{b})$ と表わされ， $F_{\text{vex}}(\mathbf{b})$ が下に凸の関数， $F_{\text{cave}}(\mathbf{b})$ が上に凸の関数のとき，更新則として $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ に従って \mathbf{b} を更新させる．ここで ∇ はベクトル微分演算子である．この更新則の下で最小化したい関数 $F(\mathbf{b})$ について $F(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leq F(\mathbf{b}^{(t)})$ の単調減少性が成り立つ．振り返って対象とする最小化したいベータ自由エネルギー，菊池自由エネルギーは明示的に上に凸，下に凸の関数に分かれている．これにより CCCP の更新式 $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ を適用することができ，ベータ自由エネルギー，菊池自由エネルギーの単調減少アルゴリズムが得られることになる．

本稿では，それらのベータ自由エネルギー，菊池自由エネルギーに対する CCCP アルゴリズムに対して，それらを拡張した新しい CCCP アルゴリズムを与える．拡張は素直な拡張であり，こちらの方が Yuille で与えられた CCCP アルゴリズム [1] よりも標準的なアルゴリズムとすることができる．拡張の際に導入した自由度は一般には関数で良いが，ここで与えている具体的なアルゴリズムでは，菊池自由エネルギーが region 集合上で定義されている中で，その region 集合に含まれる region の個数だけ自由度を導入している．新しい CCCP の更新式はその自由度だけのフリーパラメータを含んだ形で表され，定義域内で設計者がそのフリーパラメータの値を自由に変えることができる．定義域内のある 1 点を選んだとき，従来の CCCP に帰着されることになる．ここでは従来の CCCP と区別する意味で菊池自由エネルギーに対する新しい CCCP アルゴリズムを New CCCP (NCCCP) と呼んで区別する．ベータ自由エネルギーは菊池自由エネルギーの特別な場合であることから，実際的には菊池自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズムを以下では与える．

2 ベータ自由エネルギー・菊池自由エネルギー

この章は，notation の定義のために菊池自由エネルギーを説明する．vertex 集合 $\mathcal{V} = \{1, \dots, d\}$ とその間の edge を元とする edge 集合 \mathcal{E} からなる無向グラフ $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ を考える．グラフ \mathcal{G} 上で定義される高次元確率分布として

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \psi_{ij}(x_i, x_j) \prod_{i \in \mathcal{V}} \psi_{ii}(x_i) \quad (2)$$

の形を考える．式 (2) はしばしば事後分布の意味を持つ．高次元確率分布 $P(\mathbf{x})$ を試験分布 $b(\mathbf{x})$ で近似するとき $b(\mathbf{x})$ から $P(\mathbf{x})$ へのカルバック距離 $D(b||P)$ の最小化は，

$$F(b) \equiv -S(b) + \langle E(\mathbf{x}) \rangle_b \quad (3)$$

を最小化することと等しい．ここで $S(b) \equiv -\sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln b(\mathbf{x})$ であり， $E(\mathbf{x}) = -\ln P(\mathbf{x})$ である． $\langle \cdot \rangle_b$ は試験分布 $b(\mathbf{x})$ についての平均操作である．エントロピー $S(b)$ を周辺分布を使ったローカルなエントロピーで近似することを考える．

菊池自由エネルギーは，グラフ \mathcal{G} から得られる region 集合 \mathcal{R} 上で定義される．region 集合 \mathcal{R} を構成するには，はじめにグラフ \mathcal{G} から basic cluster たちを選択する．選んだ basic cluster の集合が菊池近似の近似精度を決定づけることになる．region 集合 \mathcal{R} を選択された basic cluster たちを含むものとし，region $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$ に対して sub-region $\alpha \cap \beta$ も \mathcal{R} に含まれる集合とする．basic cluster を決めた段階で region 集合 \mathcal{R} は自動的に決まることになる．菊池近似の例はたとえば [4][6] で与えられており，紙面の都合上ここでは省かせて頂く．

$\text{sup}(\alpha)$ を region 集合 \mathcal{R} の部分集合とし，region α に含まれる vertex をすべて含んでいる region の集合とする (super-regions of α)． $\text{sub}(\alpha)$ を region 集合 \mathcal{R} の部分集合とし，region に含まれるすべての vertex が region α に含まれる region の集合とする (sub-regions of α)．後のために，これら $\text{sup}(\alpha)$ ， $\text{sub}(\alpha)$ それぞれに対応して， $\text{sup}_d(\alpha)$ ， $\text{sub}_d(\alpha)$ を定義する (direct super/sub regions of α)． $\text{sup}_d(\alpha)$ を $\text{sup}(\alpha)$ の部分集合とし， $\text{sup}(\alpha)$ の中の region β に対して， $\text{sub}(\beta)$ 内の region が $\text{sup}(\alpha)$ に入っていない region の集合とする．同様に， $\text{sub}_d(\alpha)$ を $\text{sub}(\alpha)$ の部分集合とし， $\text{sub}(\alpha)$ の中の region β に対して， $\text{sup}(\beta)$ に含まれる region が $\text{sub}(\alpha)$ に入っていない region 集合とする．これらをまとめれば，

$$\begin{aligned} \text{sup}(\alpha) &= \{\beta \in \mathcal{R} | \beta \supset \alpha\}, & \text{sup}_d(\alpha) &= \{\beta \in \text{sup}(\alpha) | \text{sub}(\beta) \cap \text{sup}(\alpha) = \emptyset\} \\ \text{sub}(\alpha) &= \{\beta \in \mathcal{R} | \beta \subset \alpha\}, & \text{sub}_d(\alpha) &= \{\beta \in \text{sub}(\alpha) | \text{sup}(\beta) \cap \text{sub}(\alpha) = \emptyset\} \end{aligned} \quad (4)$$

である．

この region 集合の定義の下で，菊池自由エネルギーは

$$F_K(\{b_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{R}}) \equiv -\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_\alpha S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_\alpha \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}. \quad (5)$$

で与えられる．ここで $\{b_\alpha\}$ は初めに与えられた高次元確率分布 (2) の周辺分布を求めるための belief である． $S_\alpha(b_\alpha)$ はローカルエントロピー $-\sum_{\mathbf{x}_\alpha} b_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \ln b_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ である． $E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ は，

$$E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) = -\sum_{\alpha} \log \psi_{ij}(x_i, x_j) - \sum_{\alpha} \log \psi_{ii}(x_i) \quad (6)$$

で与えられる． \sum_{α} は region α に含まれている vertex, edge についての和である．エントロピー $S_\alpha(b_\alpha)$ と $E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ にかかっている係数 c_α は，over-counting number と呼ばれ，basic cluster たちを $c_\alpha = 1$ とした下で，

$$c_\alpha = 1 - \sum_{\beta \in \text{sup}(\alpha)} c_\beta \quad (7)$$

の漸化式に従って定まる値である．菊池自由エネルギーでは全体のエントロピー $S(b)$ を，region 集合に含まれる region 上の局所的なエントロピーを使って近似し，region 同士のエントロピーのカウントが辻褃が合うように over-counting number c_α によって調整されている．belief $\{b_\alpha\}$ の汎関数である菊池自由エネルギーを最小化することによって得られる $\{b_\alpha^*\}$ が高次元確率分布 (2) の近似周辺分布を与えることになる．以下では belief $\{b_\alpha\}$ を並べてできるベクトルとして \mathbf{b} と書くことがある．また時刻 t のときの belief のベクトルを $\mathbf{b}^{(t)}$ と書き，belief の固定点を \mathbf{b}^* と書くことにする．ベーテ自由エネルギーは basic cluster 集合を edge 集合 \mathcal{E} と取ったときに相当する．このとき $\mathcal{R} = \{\mathcal{E}, \mathcal{V}\}$ である．

3 CCCP (Concave Convex Procedure)

CCCP[1] は導入部分で述べたとおり，最小化したい関数が下に凸と上に凸の関数の和 $F(\mathbf{b}) = F_{\text{vex}}(\mathbf{b}) + F_{\text{cave}}(\mathbf{b})$ で分かれているときに $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ の更新則に従ってベクトル \mathbf{b} を更新させるものである．このときに $F(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leq F(\mathbf{b}^{(t)})$ が保証される．CCCP の更新式は，評価関数 $F(\mathbf{b})$ の代わりに新しい評価関数である $F(\mathbf{b}^{(t+1)}|\mathbf{b}^{(t)}) = F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}) + \mathbf{b}^{(t+1)} \cdot \nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ の極値条件によって得られるものである．関数 $F(\mathbf{b}^{(t+1)}|\mathbf{b}^{(t)})$ は $\mathbf{b}^{(t+1)}$ の関数であり，このとき $\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ は定数となることから，concavity 性は存在することなく $F(\mathbf{b}^{(t+1)}|\mathbf{b}^{(t)})$ は下に凸な関数となる．

belief $\{b_\alpha\}$ について最小化させたい汎関数である菊池自由エネルギーは，実は下に凸な汎関数と上に凸な汎関数に明示的に分かれている．エントロピー $S_\alpha(b_\alpha)$ は上に凸の汎関数であり，第二項 $E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ は belief $\{b_\alpha\}$ について線形である．係数である c_α は，漸化式 (7) に従って正負両方とも取りえる． c_α がマイナスの値のときには $c_\alpha S_\alpha(b_\alpha)$ はひっくりかえって下に凸の汎関数となる．これにより，菊池自由エネルギーは上に凸と下に凸の汎関数の和で構成されていることになる．よって CCCP を使うことができる．Yuille はたくさんある分け方の中でも，下に凸な汎関数 $F_{K,\text{vex}}(\{b_\alpha\})$ と上に凸な汎関数 $F_{K,\text{cave}}(\{b_\alpha\})$ の組として

$$\begin{aligned} F_{K,\text{vex}}(\{b_\alpha\}) &= -\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_{\max} S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_{\max} \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}, \\ F_{K,\text{cave}}(\{b_\alpha\}) &= -\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha - c_{\max}) S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha - c_{\max}) \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}, \end{aligned} \quad (8)$$

のように構成している．ここで c_{\max} は over-counting number $\{c_\alpha\}$ の中の最大値 $c_{\max} = \max_{\alpha \in \mathcal{R}} c_\alpha$ である．basic cluster に対しては $c_\alpha = 1$ であることから， $c_{\max} \geq 1$ の正の値が保証される．これによって $-c_{\max} S_\alpha(b_\alpha)$ は下に凸となり $F_{K,\text{vex}}(\{b_\alpha\})$ に入っていることになる．また c_{\max} は $\{c_\alpha\}$ の中の最大値であることから， $c_\alpha - c_{\max} \leq 0$ が保証される．これにより $-(c_\alpha - c_{\max}) S_\alpha(b_\alpha)$ が上に凸となり $F_{K,\text{cave}}(\{b_\alpha\})$ に入れている．Yuille は式 (8) で表される $F_{K,\text{vex}}(\{b_\alpha\})$, $F_{K,\text{cave}}(\{b_\alpha\})$ に対する分け方を採用した下で，更新式 $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)})$ に従う菊池自由エネルギーに対する CCCP アルゴリズムを導出している．ベーテ近似のときは basic cluster の集合を特別な場合である edge 集合 \mathcal{E} に設定したときであり，region 集合は $\mathcal{R} = \{\mathcal{E}, \mathcal{V}\}$ である．このとき集合 \mathcal{N}_i を vertex i と直接に edge を結んでいる vertex の集合としたもとの， $c_{ij} = 1$, $\{ij\} \in \mathcal{E}$, $c_i = -|\mathcal{N}_i| + 1$, $i \in \mathcal{V}$, $c_{\max} = 1$ である．これによりベーテ自由エネルギーのときの分解の仕方は，

$$\begin{aligned} F_{\text{Bethe},\text{vex}}(\{b_{ij}\}, \{b_i\}) &= -\sum_{\{ij\} \in \mathcal{E}} S_{ij}(b_{ij}) - \sum_{i \in \mathcal{V}} (-|\mathcal{N}_i| + 1) S_i(b_i) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}, \\ F_{\text{Bethe},\text{cave}}(\{b_i\}) &= \sum_{i \in \mathcal{V}} |\mathcal{N}_i| S_i(b_i) - \sum_{i \in \mathcal{V}} |\mathcal{N}_i| \langle E_i(x_i) \rangle_{b_i}, \end{aligned} \quad (9)$$

に具体化される．

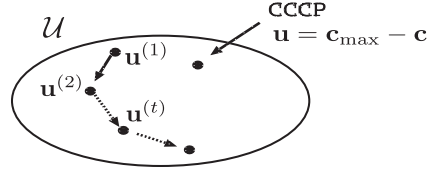


Figure 1: パラメータ空間 \mathcal{U} の中で従来の CCCP アルゴリズムは一点 $\mathbf{u} = \mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}$ に対応される． \mathcal{U} の中で \mathbf{u} の軌跡 $\mathbf{u}^{(t)}$ が許される．

4 CCCP アルゴリズムの拡張

菊池自由エネルギーは線形のエネルギー項である $E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ と局所エントロピーの線形結合で構成され、式 (8) の分け方の下で CCCP アルゴリズムが構成されていた．しかしながら、菊池自由エネルギーには下に凸、上に凸の汎関数への分解の仕方には不定性が残る [7]．一般に、下に凸の汎関数 $f_{\text{vex}}(\mathbf{b})$ に対して自明な等式 $0 = f_{\text{vex}}(\mathbf{b}) - f_{\text{vex}}(\mathbf{b})$ が成り立つことを使えば、必ずしもエントロピーの形とは限らない汎関数の対 $f_{\text{vex}}(\mathbf{b}), -f_{\text{vex}}(\mathbf{b})$ に対して、式 (8) の $F_{K,\text{vex}}(\{b_\alpha\}), F_{K,\text{cave}}(\{b_\alpha\})$ のそれぞれに付け加えることができる:

$$\begin{aligned} F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}, f_{\text{vex}}) &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_{\max} S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} c_{\max} \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha} + f_{\text{vex}}(\mathbf{b}), \\ F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b}, f_{\text{vex}}) &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha - c_{\max}) S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha - c_{\max}) \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha} - f_{\text{vex}}(\mathbf{b}). \end{aligned} \quad (10)$$

これにより $F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}), F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b})$ への分解の仕方には関数の自由度があることになる．ここでは

$$F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}) = F_K(\mathbf{b}) + f(\mathbf{b}), \quad F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b}) = -f(\mathbf{b}), \quad (11)$$

とおいた下で、 $f(\mathbf{b})$ は必ずしも region 集合上の局所エントロピーの線形結合でなくてもよいが、

$$f(\mathbf{b}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} u_{E,\alpha} \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} u_{S,\alpha} S_\alpha(b_\alpha) \quad (12)$$

で表わされるときを考える．ここで $u_{S,\alpha}, u_{E,\alpha}$ は region $\alpha \in \mathcal{R}$ に対応して与えられるフリーパラメータである．フリーパラメータ $\{u_{S,\alpha}\}$ を集めたベクトル表示を \mathbf{u} と書くことにする．エントロピーの線形結合 (12) を考えるとき従来の CCCP アルゴリズムの直接的な拡張が得られることになる．式 (12) の下で菊池自由エネルギーの分解 $F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}), F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b})$ は、フリーパラメータ \mathbf{u} に依存する形で

$$\begin{aligned} F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha + u_{S,\alpha}) S_\alpha(b_\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (c_\alpha + u_{E,\alpha}) \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}, \\ F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} u_{S,\alpha} S_\alpha(b_\alpha) - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} u_{E,\alpha} \langle E_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \rangle_{b_\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

で表わされる．フリーパラメータ \mathbf{u} には、 $F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}), F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b})$ がそれぞれ下に凸、上に凸の汎関数となるためには満たすべき条件が存在し、 \mathbf{u} の定義域 \mathcal{U} が存在する．それは

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R}|} \mid u_{S,\alpha} > -c_\alpha \text{ and } u_{S,\alpha} \geq 0, \forall \alpha \in \mathcal{R}\} \quad (14)$$

である． $u_{E,\alpha}$ は任意の実数を動く． \mathcal{U} の中で $\mathbf{u} = \mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}$ である 1 点を選んだとき、従来の CCCP アルゴリズムに相当する． $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ の下で $F_{K,\text{vex}}(\mathbf{b}, \mathbf{u}), F_{K,\text{cave}}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ が柔軟に動く中で、CCCP の更新式 $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}, \mathbf{u}^{(t)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)}, \mathbf{u}^{(t)})$ に従って更新させる．アルゴリズムはパラメータ \mathbf{u} に依存することになるが、固定点の位置はパラメータ \mathbf{u} に左右されず、菊池自由エネルギーの極値である．またフリーパラメータ \mathbf{u} は \mathcal{U} の中で時刻 t に依存してよく、更新ごとに \mathbf{u} の値を変えることが許される．それでも単調減少性 $F(\mathbf{b}^{(t+1)}) \leq F(\mathbf{b}^{(t)})$ は満たされる．このことは、菊池自由エネルギーの上に凸、下に凸の分解の仕方について、毎時刻、動的に変更しても良いことを意味している．菊池自由エネルギー (5) に、 $\nabla F_{\text{vex}}(\mathbf{b}^{(t+1)}, \mathbf{u}^{(t)}) \leftarrow -\nabla F_{\text{cave}}(\mathbf{b}^{(t)}, \mathbf{u}^{(t)})$ を適用して得られる結果的な NCCCP アルゴリズムは以下で与えられる．

菊池自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズムは、

- Outer Loop

$$b_k^{(t+1)} \leftarrow \{b_k^{(t)}\}^{\frac{u_k}{c_k+u_k}} \exp \left\{ -\tilde{v}_k - \sum_{\beta \in \text{sub}_d(k)} \frac{\eta_{k,\beta}(\mathbf{x}_\beta)}{c_k + u_k} + \sum_{\gamma \in \text{sup}_d(k)} \frac{\eta_{\gamma,k}(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} - \frac{c_k E_k(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} \right\} \quad k \in \mathcal{R}$$

- Inner Loop

$$\begin{aligned} \exp(\tilde{v}_k^{(\tau+1)}) &\leftarrow \sum_{\mathbf{x}_k} \{b_k^{(t)}\}^{\frac{u_k}{c_k+u_k}} \exp \left\{ - \sum_{\beta \in \text{sub}_d(k)} \frac{\eta_{k,\beta}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\beta)}{c_k + u_k} + \sum_{\gamma \in \text{sup}_d(k)} \frac{\eta_{\gamma,k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} - \frac{c_k E_k(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} \right\} \quad k \in \mathcal{R} \\ \exp \left\{ \left(\frac{\eta_{k,l}^{(\tau+1)}(\mathbf{x}_l)}{c_k + u_k} + \frac{\eta_{k,l}^{(\tau+1)}(\mathbf{x}_l)}{c_l + u_l} \right) \right\} \\ &\leftarrow \sum_{\mathbf{x}_k \setminus l} \frac{\{b_k^{(t)}\}^{\frac{u_k}{c_k+u_k}} \exp \left\{ -\tilde{v}_k^{(\tau)} - \sum_{\beta \in \text{sub}_d(k) \setminus l} \frac{\eta_{k,\beta}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\beta)}{c_k + u_k} + \sum_{\gamma \in \text{sup}_d(k)} \frac{\eta_{\gamma,k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} - \frac{c_k E_k(\mathbf{x}_k)}{c_k + u_k} \right\}}{\{b_l^{(t)}\}^{\frac{u_l}{c_l+u_l}} \exp \left\{ -\tilde{v}_l^{(\tau)} - \sum_{\beta \in \text{sub}_d(l)} \frac{\eta_{l,\beta}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\beta)}{c_l + u_l} + \sum_{\gamma \in \text{sup}_d(l) \setminus k} \frac{\eta_{\gamma,l}^{(\tau)}(\mathbf{x}_l)}{c_l + u_l} - \frac{c_l E_l(\mathbf{x}_l)}{c_l + u_l} \right\}} \end{aligned} \quad k \in \mathcal{R}, \quad l \in \text{sub}_d(k)$$

で与えられる。ただしパラメータ \mathbf{u} は $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ であり、Outer Loop の時刻 t に依存して良い。

Outer Loop は、belief $\{b_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{R}$ を時刻 t から時刻 $t+1$ へ更新させる更新式であり、belief の収束先 \mathbf{b}^* が高次元確率分布 (2) の近似的な周辺分布を与える。ここで Outer Loop を更新するのに必要な $\{\tilde{v}_k\}$, $\{\eta_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}_\beta)\}$ は、belief \mathbf{b} の間の拘束条件からくるラグランジュ未定乗数であり、それらの時刻 τ から $\tau+1$ への更新式である Inner Loop の収束先 $\{\tilde{v}_k^*\}$, $\{\eta_{\alpha,\beta}^*(\mathbf{x}_\beta)\}$ によって与えられる。Outer Loop の各時刻に対して Inner Loop を収束するまでまわしたとき、確率伝搬法とは異なりサイクルを含む確率分布であっても、菊池自由エネルギーの極値への収束が保証されることになる。

5 具体例

ここでは前節で与えた菊池自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズムを具体的なケースに適用し、その有効性を示す。以下の具体例はすべて菊池自由エネルギーの中でも basic cluster の集合を edge 集合 \mathcal{E} とおいたベータ自由エネルギーの場合についてである。また、NCCCP アルゴリズムではパラメータ \mathbf{u} の値は Outer Loop ごとに変わっても良いが、更新時間に依存しない一定値のときを考えている。よってうまくパラメータ $\mathbf{u}^{(t)}$ の軌跡を設計することで、より計算量が落ちる可能性は残されている。数値実験の結果、従来の CCCP で行われている下に凸、上に凸の汎関数の分け方は計算量的に損をする分け方であり、下に凸、上に凸に分ける分け方には最適性が存在することが示唆される結果を得た。以下の具体例はそれぞれガウシアングラフィカルモデル (GGM) [8]、近似 MPM 推定による CDMA マルチユーザ復調 [9] の場合についてである。

5.1 ガウシアングラフィカルモデル (GGM)

5.1.1 実験結果

更新式等の詳細は割愛するが、高次元確率分布 (2) が多次元正規分布の場合であるガウシアングラフィカルモデルに適用したときの実験結果は図 2-5 となった。縦軸は NCCCP が収束するまでの計算量であり、収束するまでの Inner Loop の総回数をとっている。横軸はパラメータ \mathbf{u} の値を表し、 $u_i = u$, $i \in \mathcal{V}$, $u_{ij} = 0$, $\{ij\} \in \mathcal{E}$ に固定したときの状況を考えている。4 つの図に対応する GGM はそれぞれ平均が 0、精度行列が $S(s_0, s, d)$ で表されるときである。ただし $S(s_0, s, d)$ は対角成分が s_0 、非対角成分がすべて s である $d \times d$

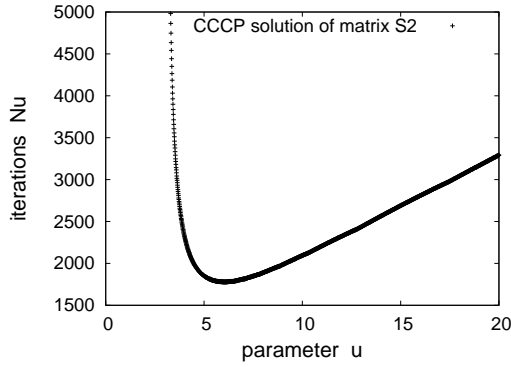


Figure 2: $S(10, 2, 5)$

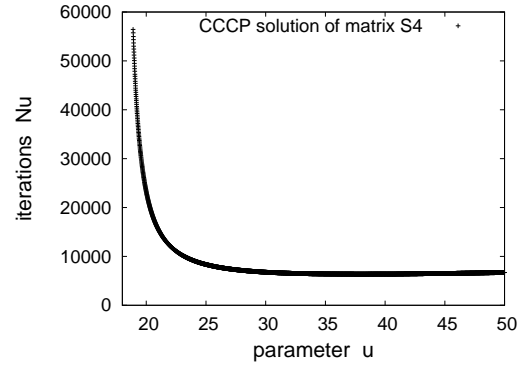


Figure 3: $S(10, 0.1, 20)$

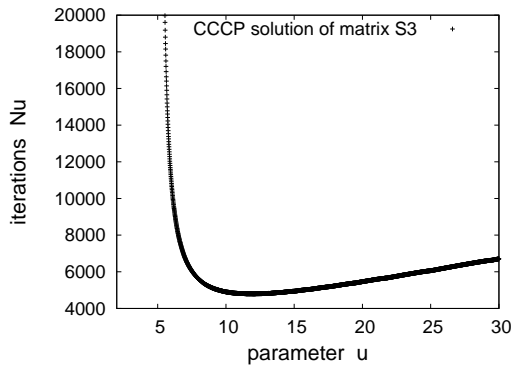


Figure 4: $S(10, 2, 5)$

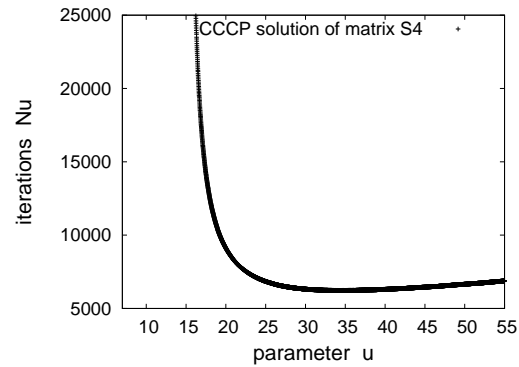


Figure 5: $S(10, 0.1, 10)$

精度行列である．従来の CCCP は，パラメータ u の値を $u = c_{\max} - c_i = |N_i|$ に設定したときであり，図の順番に $u = 4, 19, 4, 9$ のときである．図 2,3 は特に NCCCP アルゴリズムの中の Inner Loop について，非同期的に更新させたときの結果である．図 4,5 はこれらとは異なり Inner Loop を同期的に更新させたときの結果である．Inner Loop を同期的に更新させた場合，一般に CCCP の収束は保証されない．4 つのグラフの結果から，パラメータ u の設定に NCCCP の計算量が大きく依存していることがわかる．そして u の値には最適点が存在し，その点は従来の CCCP には対応しない．特に比較的次元の高い 20 次元である図 3 のときは，従来の CCCP は $u = 19$ のときに相当し，Outer Loop が収束するまでの Inner Loop の総回数は 40000 ~ 50000 回である．しかしながらパラメータ u の値を事前に大きい値に選んでおけば，8000 回ほどで収束する．従来の CCCP ($u = 19$) は最適点とは程遠い所に位置し，従来の CCCP の点と最適点との間の計算量の開き具合は，高次元にしていけばいくほど顕著に現れる．高次元を取り扱う際には，「More is different」に従って，菊池自由エネルギーの分解の仕方についても洗練して考えた最適点またはその付近を選ぶべきと言える．図 4,5 は Inner Loop を同期的に更新させた場合であるが，このとき従来の CCCP ($u = 4, 9$) は，計算量が発散し収束しない．しかしながら，NCCCP では，パラメータ u の値を事前に大きくしておけば，同期的な更新の場合であっても収束し始め，最適性も観測されることになる．

5.1.2 パラメータ $\{u_\alpha\}$ の役割

パラメータ $\{u_\alpha\}$ の役割は，経験的に次のようである．パラメータ $\{u_\alpha\} \in \mathcal{U}$ の値が小さければ，Inner Loop の収束は遅くなり，Outer Loop の収束は速くなる．反対に，パラメータ $\{u_\alpha\}$ の値を大きくしていけば，Inner Loop の収束は速くなり，Outer Loop の収束が遅くなる．この trade-off により，パラメータ $\{u_\alpha\}$ には計算量の点で最適点が存在することになる．従来の CCCP は $\{u_\alpha\} \in \mathcal{U}$ があまりにも小さい状況に相当する．これにより Inner Loop の収束が遅く，計算量的に損をする設定になっていた．このパラメータ $\{u_\alpha\}$ の振る舞いは，固定点まわりの線形安定性解析等を考えることで，解析的にも示されることが考えられる．GGM の特別な簡単な場合であれば，[8] においても， u が大きくなるとともに Inner Loop の収束が速くなり，同期的に Inner Loop を更新させた場合の NCCCP の収束条件について解析的に与えている．一般の NCCCP アルゴリズムの Outer Loop, Inner Loop についてこれらを解析的に示すことは課題として残されている．

5.2 NCCCP に基づく CDMA マルチユーザ復調アルゴリズム

ここでは², CDMA マルチユーザ復調問題の具体例を考える [10],[11]. CDMA マルチユーザ復調で, 観測信号が与えられた下でのユーザ送信情報ビットに対する事後分布において, MPM 復調を NCCCP アルゴリズムを用いて行う. CDMA モデルで定式化される事後分布は, 同一セル内の携帯電話ユーザ数と同じだけの次元の確率分布であり, 確率分布のグラフ構造は, factor graph において完全 2 部グラフで表される. グラフ構造はサイクルをたくさん含む密グラフであるものの, 先行研究として, 確率伝搬法に基づくマルチユーザ復調アルゴリズムの有効性が示されている [12]. しかしながら, ユーザ数, チップ数が小さいシステムサイズるときでは, ビット誤り率の点で必ずしも良い性能を与えるとは限らず, CCCP に基づいた復調アルゴリズムの優位性が示されている [13]. しかし CCCP には計算量が多く必要である問題があった. これに対して, NCCCP に基づいたマルチユーザ復調アルゴリズムを構成し, NCCCP の CCCP に対する有効性を検証した.

5.2.1 CDMA マルチユーザ復調の定式化

取り扱う CDMA 通信方式は DS/BPSK 方式を単純化したモデルであり, K 人の携帯電話ユーザが同一の基地局に情報ビット ± 1 を送信する状況を考える. k 番目のユーザが送信した情報ビットを x_k と表わす. 送信情報を変調するのに使った拡散符号のチップ数を N とし, ユーザ k に割り当てられる拡散符号を $s_{\mu k}, \{\mu = 1, \dots, N\}$ と表わす. 拡散符号 $\{s_{\mu k}\}$ は, ユーザ, チップに対して独立で同一な $\{+1, -1\}$ 上の一様分布

$$P(s_{\mu k} = +1) = P(s_{\mu k} = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{for } \forall \mu, \forall k \quad (15)$$

に従って発生させるものとする. 携帯電話と基地局との間の通信路を白色ガウス通信路とし, 通信路ノイズの分散を σ_0^2 とする. 拡散変調の結果, 基地局で受信されるチップ数 N 個の受信信号 $\{y_\mu\}$ が,

$$y_\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^K s_{\mu k} x_k + n_\mu \quad (16)$$

で表わされる状況を考える. ここで加法ノイズ n_μ は $n_\mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0)$ に従う.

以上の設定の下で, 観測された受信信号 $\{y_\mu\}$ と拡散符号 $\{s_{\mu k}\}$ を用いてユーザ k の送信情報ビットを推定する CDMA 復調問題を取り扱う. 以降では, 推定されたユーザ k の送信情報ビットを \hat{x}_k で表し, $\{x_k\}, \{s_{\mu k}\}, \{y_\mu\}, \{\hat{x}_k\}$ をしばしば, ベクトル, 行列表示として $\mathbf{x}, \mathbf{S}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}$ で表わす.

CDMA 復調の性能は, 各ユーザが送信した真の信号 \mathbf{x} と推定された信号 $\hat{\mathbf{x}}$ の間のオーバーラップ $M = \langle \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{K} \rangle_{\mathbf{x}, n_\mu}$ を用いて, ビット誤り率 $P_b = \frac{1-M}{2}$ によって測られる. ここで $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{x}, n_\mu}$ は送信情報ビット \mathbf{x} , 通信路ノイズ n_μ についての平均操作である.

ユーザ k が送った送信情報ビットをベイズ事後分布

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{\varphi(\mathbf{x}) \prod_{\mu=1}^N P_\mu(y_\mu|\mathbf{x}, \sigma)}{\sum_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \prod_{\mu=1}^N P_\mu(y_\mu|\mathbf{x}, \sigma)} \quad (17)$$

に対して MPM 推定に基づいて復調を行う. ここで確率分布 $P_\mu(y_\mu|\mathbf{x}, \sigma)$ は式 (16) において, 通信路ノイズの標準偏差を σ と推定したときの \mathbf{x} を所与とする y_μ の確率分布であり, $\varphi(\mathbf{x})$ は事前分布である. ただし以降では, 事前分布は一様分布とし, 真の通信路ノイズの標準偏差 σ_0 は既知のときを考える.

5.2.2 Ising スピンのときの NCCCP アルゴリズム

MPM 復調の実現に, 事後分布 (17) に対して NCCCP アルゴリズムを適用する. ここでは一般に, CDMA の事後分布 (17) を含む確率分布

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{\mu=1}^N f_\mu(\mathbf{x}_\mu)}{\sum_{\mathbf{x}} \prod_{\mu=1}^N f_\mu(\mathbf{x}_\mu)} \quad (18)$$

に対して NCCCP アルゴリズムを適用する. ここで \mathbf{x}_μ はインデックス μ で与えられる $\mathbf{x} \in \{+1, -1\}^K$ の部分ベクトルである. 以下, 集合 N_μ を部分ベクトル \mathbf{x}_μ を構成する vertex 集合とし, 集合 N_k を $k \in N_\mu$

²この節の内容は, 東京工業大学榊島研究室 2007 年卒の外崎幸徳氏の協力の下で行われた.

を満たすインデックス集合とする． $x_k \in \{+1, -1\}$ より belief $b_k(x_k)$ と $\exp\{-\eta_{\mu k}(x_k)\}$ を

$$\begin{aligned} b_k^{(t)}(x_k) &= \frac{1 + m_k^{(t)} x_k}{2} = \frac{1 + \tanh(h_k^{(t)}) x_k}{2}, \\ \exp\{-\eta_{\mu k}^{(\tau)}(x_k)\} &= \frac{1 + m_{\mu k}^{(\tau)} x_k}{2} = \frac{1 + \tanh(h_{\mu k}^{(\tau)}) x_k}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

とおいても一般性は失わない．ただし belief $b_\mu(\mathbf{x}_\mu)$ を記述する変数の数は指数的に増大することから，フリーパラメータ u_μ は特別な場合として $u_\mu = 0$ を考えている． $u_\mu \neq 0$ の状況をうまく取り入れることで，異なるアルゴリズムを導出することは可能である． $u_\mu = 0$ のときの NCCCP アルゴリズムは以下のように与えられる．

ベータ自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズム (Ising スピン, $u_\mu = 0$)³

ベータ自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズムは Ising スピンのとき，さらに $u_\mu = 0$ のとき，

- Outer Loop

$$h_k^{(t+1)} \leftarrow \frac{u_k^{(t)}}{u_k^{(t)} - |N_k| + 1} h_k^{(t)} - \frac{\sum_{\mu \in N_k} h_{\mu k}}{u_k^{(t)} - |N_k| + 1}$$

- Inner Loop

$$h_{\mu k}^{(\tau+1)} \leftarrow \frac{u_k^{(t)}}{u_k^{(t)} - |N_k| + 2} h_k^{(t)} - \frac{u_k^{(t)} - |N_k| + 1}{u_k^{(t)} - |N_k| + 2} \hat{h}_{\mu k}^{(\tau)} - \frac{1}{u_k^{(t)} - |N_k| + 2} \sum_{\alpha \in N_k \setminus \mu} h_{\alpha k}^{(\tau)}$$

で与えられる．パラメータ $u_k^{(t)}$ の定義域は $u_k^{(t)} > |N_k| - 1$ である．ただし $\hat{h}_{\mu k}^{(\tau)}$ は，確率分布 $b_{\mu k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\mu)$ を

$$b_{\mu k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\mu) = \frac{1}{Z_{\mu k}^{(\tau)}} f_\mu(\mathbf{x}_\mu) \prod_{l \in N_\mu \setminus k} \frac{1 + m_{\mu l}^{(\tau)} x_l}{2}$$

とおいたとき， $\hat{m}_{\mu k}^{(\tau)} = \tanh \hat{h}_{\mu k}^{(\tau)} = \langle x_k \rangle_{b_{\mu k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\mu)}$ で与えられる量である．

このアルゴリズムを CDMA マルチユーザ復調に適用するとき，CDMA の事後分布 (17) は， $\mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}$ ， $N_k = \{1, \dots, N\}$ ， $N_\mu = \{1, \dots, K\}$ である．このとき，確率分布 $b_{\mu k}^{(\tau)}(\mathbf{x}_\mu)$ はユーザ数 K と同じだけの次元の高次元確率分布となり直接的な計算は困難である．この計算については，拡散符号系列が相関を持たないとき，中心極限定理に基づく評価式が，BP に基づく CDMA マルチユーザ復調 [12] で考案されている．その評価式は，

$$\hat{h}_{\mu k}^{(\tau)} \approx \frac{s_{\mu k}(y_\mu - \Delta_{\mu k}^{(\tau)})}{\sqrt{N}\{\sigma^2 + \beta(1 - Q_{\mu k}^{(\tau)})\}} \quad (20)$$

である．ここで， β はユーザ数とチップ数の比である負荷率 $\beta = \frac{K}{N}$ であり， $\Delta_{\mu k}^{(\tau)}$ ， $Q_{\mu k}^{(\tau)}$ はそれぞれ

$$\Delta_{\mu k}^{(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1(\neq k)}^K s_{\mu l} m_{\mu l}^{(\tau)}, \quad Q_{\mu k}^{(\tau)} = \frac{1}{K} \sum_{l=1(\neq k)}^K (m_{\mu l}^{(\tau)})^2 \quad (21)$$

で与えられる．この評価式を使った上記の NCCCP アルゴリズムが実際の CDMA マルチユーザ復調ア

³このアルゴリズムは直接的には菊池自由エネルギーに対する NCCCP アルゴリズムの特別な場合に対応していない．

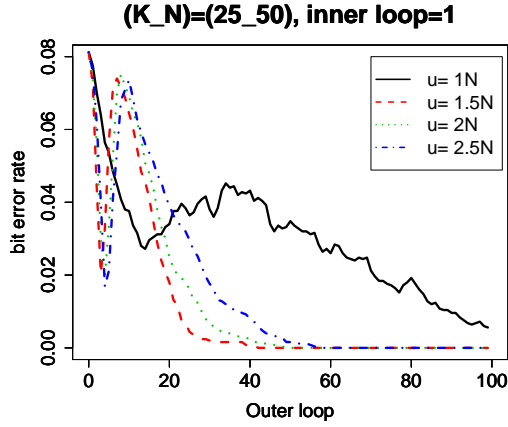


Figure 6: Bit Error Rate. $(K, N) = (25, 50)$

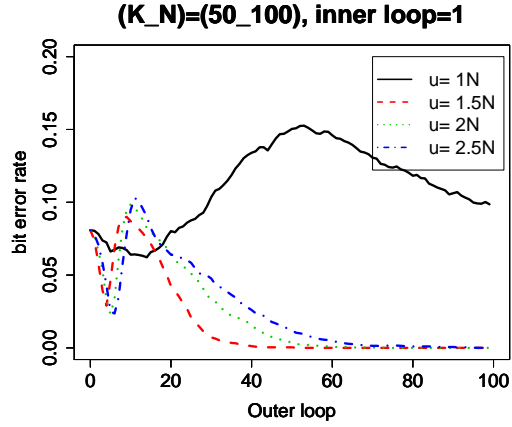


Figure 7: Bit Error Rate. $(K, N) = (50, 100)$

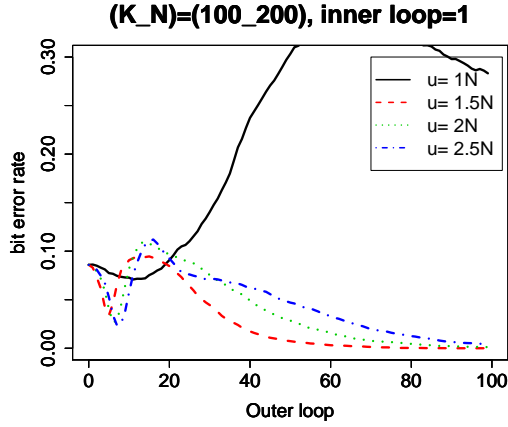


Figure 8: Bit Error Rate. $(K, N) = (100, 200)$

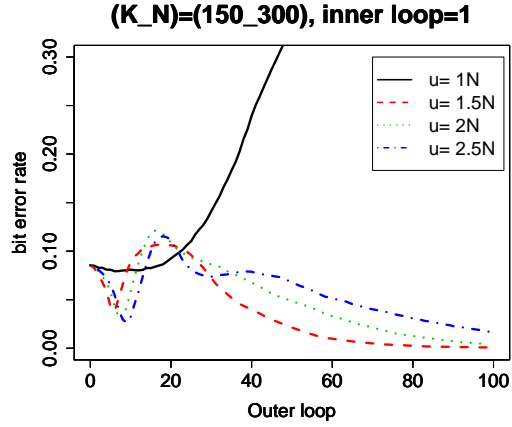


Figure 9: Bit Error Rate. $(K, N) = (150, 300)$

ルゴリズムを与える．十分反復して得られる $h_k^{(t)}$ に対して，ユーザの送信情報を

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= +1 & \text{if } h_k^{(t)} > 0 \\ \hat{x}_k &= -1 & \text{otherwise } h_k^{(t)} < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

に従って復調する．

5.2.3 実験結果

実験パラメータは先行研究 [13] と同じ状況を考え，負荷率 β を $\frac{1}{2}$ の一定値としたユーザ数 K ，チップ数 N が $(K, N) = (25, 50), (50, 100), (100, 200), (150, 300)$ の状況考えた．受信側は真の通信路ノイズを知っているとし， $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1/36$ とした． $h_k^{(t)}, m_k^{(t)}$ の初期値は，シングルユーザ復調である $h_k^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^N s_{\mu k} y_{\mu}$ ， $m_k^{(0)} = \tanh\left(\frac{h_k^{(0)}}{\sigma^2}\right)$ とした．NCCCP に導入したパラメータ $u_k^{(t)}$ を $u_k^{(t)} > N - 1$ を満たす範囲で変更することで，復調の性能の変化を調べた．パラメータ $u_k^{(t)}$ の値はユーザ k ，Outer Loop の更新時刻 t に依存して良いが，ここでは簡単のため， k, t に依存しない一定値 $u_k^{(t)} = u$ の場合を考えた．ビット誤り率の実験結果が図 6,7,8,9 である．図は Outer Loop を更新していったときのビット誤り率の変化を示し，計算量を落とすために，アルゴリズム内での Inner Loop の更新回数は最小回数の 1 回とした． u の値はチップ数 N の定数倍である $u = N, 1.5N, 2N, 2.5N$ の場合を考えている． $u = N$ のときに従来の CCCP に対応する．図より，従来の CCCP ($u = N$) では，Inner Loop を Outer Loop 各時刻に 1 度更新しただけでは，Inner Loop の更新回数が足りず Outer Loop の収束が遅れていることがわかる．しかしながら，拡張された NCCCP で

はパラメータ u の値を $u = N, 1.5N, 2N, 2.5N$ と変えていくことで、ビット誤り率が良好に 0 に落ちていることがわかる。NCCCP の方が速く 0 に落ちるという結果は、少数であることが好ましい Inner Loop の回数について、2, 3, 4, 5 回の場合も同様であった。

6 まとめ

本稿では、菊池自由エネルギーを最小化する際に CCCP アルゴリズムを考えたとき、上に凸、下に凸の分解の不定性に注目し従来の CCCP アルゴリズムを拡張した。上に凸、下に凸の分解の仕方には最適性が存在することが見出され、高次元を対象とするときには、分解の仕方によって計算量の点で大きく差が現れることがわかった。アルゴリズムに導入したフリーパラメータ u は Outer Loop 毎に値を変えてもよく、したがって原理的には、 U の中で最適な軌跡 $u^*(t)$ が存在することが予想されるが、この軌跡またはその付近を近似する $u(t)$ に基づいた設計の仕方はオープンな問題としてある。またそもそも上に凸、下に凸の最適な分け方は関数族 (12) に入る保証もなく、一般論として (10) を扱い微分方程式を解くアプローチが考えられるかもしれない。今後は、NCCCP アルゴリズムにおいて、LDPC 復号 [14] に対する有効性の検証が、興味ある内容である。また NCCCP を情報幾何学によって記述することで、情報幾何学が $u(t)$ の最適性に基づく設計の仕方についてヒントを教えてくれないものであろうか。

7 謝辞

本研究の一部は、科学研究費補助金 18079007 および特別研究員 19005165 の援助を受けている。CDMA マルチユーザ復調の内容は外崎幸徳氏との共同研究による。東京工業大学榊島祥介教授、渡辺澄夫教授には様々な有意義なコメントを頂きました。これらの方々には感謝致します。

References

- [1] A. L. Yuille. CCCP Algorithms to Minimize the Bethe and Kikuchi Free Energies: Convergent Alternatives to Belief Propagation. *Neural Computation*, Vol. 14, No. 7, pp. 1691–1722, 2002.
- [2] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*. San Mateo, CA: Morgan Kaufman, 1988.
- [3] Y. Kabashima and D. Saad. The TAP Approach to Intensive and Extensive Connectivity Systems. In M. Opper and D. Saad, editors, *Advanced Mean Field Methods - Theory and Practice*, pp. 65–84. MIT Press, 2001.
- [4] J. Yedidia, W. Freeman, and Y. Weiss. Bethe free energy, Kikuchi approximations, and belief propagation algorithms. Technical Report TR2001-16, MERL, 2001.
- [5] R. Kikuchi. A Theory of Cooperative Phenomena. *Physical Review*, Vol. 81, No. 6, pp. 988–1003, 1951.
- [6] T. Heskes. Convexity Arguments for Efficient Minimization of the Bethe and Kikuchi Free Energies. *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol. 26, pp. 153–190, 2006.
- [7] Y. Nishiyama and S. Watanabe. Generalization of Concave and Convex Decomposition in Kikuchi Free Energy. In *proc. of ICANN2008*, LNCS 5163, pp. 51–60, 2008.
- [8] 西山悠, 渡辺澄夫. ベーテ自由エネルギーに対する CCCP アルゴリズムの拡張. 信学技報, Vol. 107, No. 542, pp. 85–90, 2008.
- [9] 西山悠, 外崎幸徳, 渡辺澄夫. NCCCP に基づく CDMA マルチユーザ復調アルゴリズム. 信学技報, 12 月, to appear, 2008.
- [10] H. Nishimori. *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing*. Oxford Univ. Press, 2001.
- [11] T. Tanaka. A Statistical-Mechanics Approach to Large-System Analysis of CDMA Multiuser Detectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 48, No. 11, pp. 2888–2910, 2002.
- [12] Y. Kabashima. A CDMA multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, Vol. 36, No. 43, pp. 11111–11121, 2003.
- [13] 外崎幸徳, 榊島祥介. CCCP に基づく CDMA マルチユーザ検出アルゴリズム. 電子情報通信学会和文誌 (D), Vol. J89-D, No. 5, pp. 1049–1060, 2006.
- [14] T. Shibuya, K. Harada, R. Tohyama, and K. Sakaniwa. Iterative Decoding Based on the Concave-Convex Procedure. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. 88, No. 5, pp. 1346–1364, 2005.