初めての代数幾何学 ①

東京工業大学　渡辺澄夫

このファイルについて(1)

このファイルは数理・計算科学系の学部3年生むけの科目
「研究プロジェクト・総合演習」のためのものです。

初めて代数幾何学に出会う人のために書かれています。

（注意） このファイルは代数幾何学を専門とするかたに
向けて書かれたものではありません。

このファイルについて(2)

代数幾何学は、普通は代数閉体上で考えることが多いと思います。しかしながら、ここでは主に実数体上での代数幾何学を考えます。統計学や学習理論への応用では実数体を考えることのほうが多いからです。

実数体上の代数幾何学は、普通の代数幾何学では成り立つ定理が成り立たないなどの特別な事情があるため、「実代数幾何学」と呼ばれることがあります。

なお特異点解消定理は実数体上でも成り立ちます。

講義の予定（変更の可能性あり）

１　代数と幾何の関係
２　特異点
３　射影空間
４　ブローアップ
５　特異点解消

初めての代数幾何学 ①

東京工業大学　渡辺澄夫

１　初めての代数幾何では何をわかりたいのか

初等代数幾何学とは　何ですか

（あ）「多項式＝０」で定義される図形を代数多様体という。

（い）　代数多様体は名前が似ているが多様体ではないので、多様体論では扱うことができない。

（う）　数学者の長い間の努力によって代数多様体という図形を考えるときは、「その図形上で零になる多項式全体」を考えると、なぜかうまくいくことがわかった。

（え）　代数を考えると　図形について　何がわかるのか　を理解しよう。

初等代数幾何学は　役に立つのですか

（１）　学問は役立つからするものではありませんが

（２）　統計学や学習理論などの具体的な実世界では代数多様体の性質を調べる必要があります。

（３）　しかしながら、昔は、代数幾何が必要になることは誰にも気づかれていませんでした。

（４）　現代になり、深層学習など、代数幾何がなければ、どうしようもない問題群が世界を覆い始めています。

（５）　代数幾何学の初等的な結果だけでさえ、統計学や学習理論における実問題の解決を与えることがわかっています。

2　代数多様体

体　の定義

体：　足し算、掛け算、（０以外での）割り算が定義されている。０と１がある。このファイルでは、実数体 **R** と 複数体 **C** のみ考える。

体の標数：単位元１の、正の整数 n 倍である n1 が０になる最小の n を体の標数という。実数体や複素数体の標数は０と定められている。

代数閉体：　体の元を係数とする代数方程式の解が、必ずその体の中に存在するとき代数閉体という。**C** は代数閉体であるが**R**は代数閉体ではない。

アフィン空間　の定義

K を体とするとき $\mathbf{K}^n$ を**アフィン空間**という。

このファイルでは、実数体 **R** について $\mathbf{R}^n$ のときを考える。
複素数体 **C** について $\mathbf{C}^n$ を考えるときには明記する。
それらはユークリッド空間と同じと思ってよい。

多項式環　の定義

変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の実数係数の多項式全体が作る集合は、通常の足し算、掛け算によって環になる。これを多項式環といい

$$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$$

と書く。0と1は、足し算、掛け算の単位元である。

例　　$\mathbf{R}[x,y] = \{\Sigma_{\text{有限和}}\, a_{mn}\, x^m y^n \,;\, a_{mn} \in \mathbf{R}\ \}$

代数多様体　の定義

多項式　$f(x) \in \mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ が与えられたとき

$$\mathbf{V}(f) = \{ x \in \mathbf{R}^n ; f(x)=0\}$$

は、多項式 f(x) の零点全体の集合である。これを
代数的集合という。代数多様体と呼ぶこともある。

注意. 代数的集合(algebraic set) あるいは代数多様体
(algebraic variety) は一般には多様体(manifold) ではない。

代数多様体　の定義(続き)

複数個の多項式　$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ・・・,$f_K(x) \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
に対しても

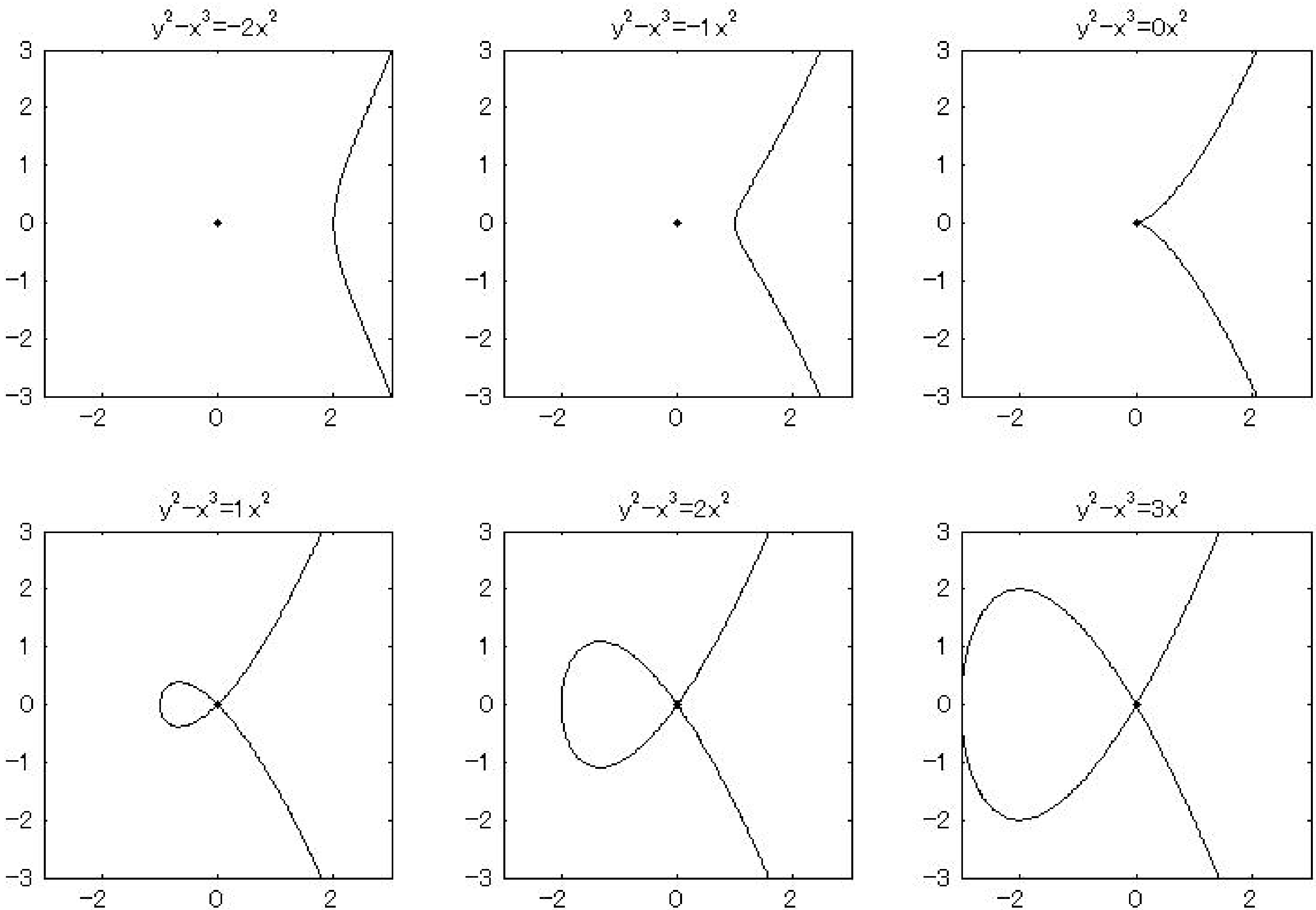
$$\mathbf{V}(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots, f_k(x))$$

$$= \{\ x \in \mathbf{R}^n\ ;\ \ f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \cdots = f_K(x) = 0\ \}$$

と定義して、これも代数的集合あるいは代数多様体という。これは複数の多項式の零点集合の共通集合である。

$$\mathbf{V}(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots, f_K(x)) = \bigcap_{k=1}^{K}\ \mathbf{V}(f_k(x))$$

多項式 $f(x,y) = y^2-x^3-kx^2 \in \mathbf{R}[x,y]$ のとき



学習理論では　どんな代数多様体が出てきますか

問題。$w=(a,b,c,d)$ とする。$\sigma(t)=t+t^3$ とする。

学習モデル $f(x,w) = a\,\sigma(bx) + c\,\sigma(dx)$ のとき 集合

$W_0=\{w\in \mathbf{R}^4\ ;\ (\forall x)\ f(x,w)=0\}$ が代数多様体で

あることを示せ。

答。 $f(x,w) = (ab+cd)x+(ab^3+cd^3)x^3$ であるから

$$W_0=\mathbf{V}(ab+cd,\ ab^3+cd^3)$$ である。

学習理論の具体的な問題

この講義の目標ではありませんが、代数幾何が役に立つかどうかわからないと不安な人のために学習理論の典型的な問題を述べます。

パラメータを $w=(a,b,c,d)$ とし

学習モデルを $f(x,w) = a\,\sigma(bx) + c\,\sigma(dx)$ とする。

$\{(X_i,Y_i)\ ;\ i=1,2,\ldots,n\}$ が独立に平均０分散１の正規分布に従うとき、二乗誤差

$$E(w) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i-f(X_i,w))^2$$

を最小にする w を w^* と書く。$E(w^*)$ の平均値を求めよ。それは代数多様体 W_0 の何か？

３　イデアル

イデアルという名前は、理想的なもの以外を許さない厳格な感じがして怖いかも知れませんが、定義を知れば、そんなに怖いものではないことがわかります。

イデアル　の定義

多項式環 $\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の部分集合 I が次の条件を満たすとき（多項式環の）イデアルという。

(1) $0 \in I$

(2) $f(x),g(x) \in I$ ならば $f(x)+g(x) \in I$

(3) $f(x) \in I$, $g(x) \in \mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ ならば $f(x)g(x) \in I$

○ イデアルはベクトル空間であり、$I \neq \{0\}$ であれば

　I はベクトル空間としては無限次元である。

多項式の集合で生成されるイデアル

複数個の多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x) \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が与えられたとき、集合

$$\{ \Sigma_{k=1}^{K} f_k(x) g_k(x) \ ; \ g_k(x) \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \}$$

はイデアルになる。この集合を $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x)$ により生成されるイデアルといい

$$< f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x) >$$

と表記する。

イデアルの例

このページでは $\mathbf{R}[x,y]$ のイデアルを考える。

L.H.(S) は集合 S の線形包(Sの元の有限線形和全体)を表す。

$$< x^2 > = \text{L.H.}\{ x^2, x^3, x^4, x^5, \cdots, yx^2, yx^3, yx^4, yx^5, \cdots, \}$$

$$< f(x) > = \text{L.H.}\{ f(x), f(x)x, f(x)x, f(x)x^2, \cdots,$$
$$f(x)y, f(x)yx, f(x)yx^2, \cdots, \}$$

$$< x^2 , y^3 > = \text{L.H.}\{ x^2, x^3, x^4, \cdots, y^3, y^4, y^5, \cdots$$
$$x^2y, x^3y, x^4y, \cdots, \}$$

$$<1> = \mathbf{R}[x,y]$$

ヒルベルトの基底定理

定理１。多項式環 $\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の任意のイデアル I に対して、
ある $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x)$ が存在して

$$I = \langle f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x) \rangle$$

が成り立つ。

☆　このことを「多項式環のイデアルは有限生成である」という。

ネーター環

定理2。多項式環 $\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ のイデアルの列 $\{I_k\}$ が

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

をみたすとき、ある k が存在して $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$ となる。

☆ この定理はヒルベルトの基底定理と等価である。

☆ この性質を「 多項式環はネーター環である 」という。

☆ 一般に **K** がネーター環なら $\mathbf{K}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ もネーター環。

イデアルで定義される代数多様体

与えられたイデアル I に対して

$$\mathbf{V}(I) = \{\, x \in \mathbf{R}^n \,;\ f(x)=0\ (\forall f(x) \in I) \,\}$$

と定義する。任意のイデアルは有限生成であるから

$$I = \langle f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x) \rangle$$

となる $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x)$ が存在する。これより

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_K(x))$$

が成り立つから $\mathbf{V}(I)$ は代数多様体である。

包含関係の逆転(1)

イデアルが大きいほど代数多様体は小さい。

定理3　I ⊂J ならば **V**(I)⊃**V**(J)

証明「x∈**V**(J) ならば x∈**V**(I) 」を示せばよい。

x∈ **V**(J) とすると、J に含まれる任意の f で f(x)=0。

従って特に I に含まれる任意の f でも f(x)=0。

すなわち x ∈ **V**(I)。（証明終）

包含関係の逆転(2)

注意 「**V**(I)⊃**V**(J) ならば I ⊂J」は一般には成り立たない。

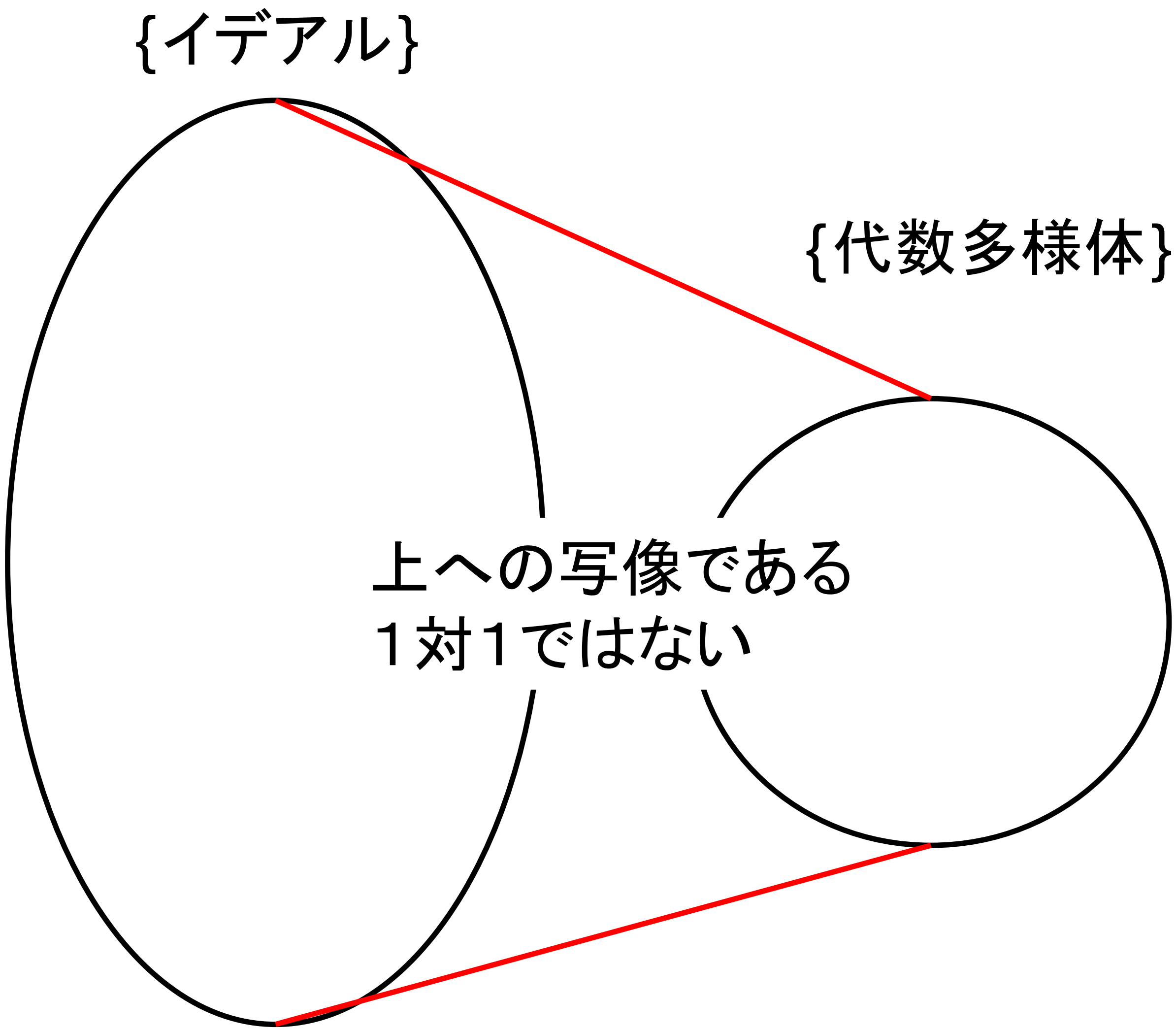
すなわち **V** は1対1写像ではない。

例。$I=<x^3>$, $J=<x^2+y^2>$ とすると **V**(I) ={(x,y);x=0}

V(J)={(x,y); x=y=0} だから **V**(I)⊃**V**(J) が成り立つが、

$x^3 \in I$ であるが x^3 は J には含まれない。

写像 V: { I } ⇒ { V(I) }



学習理論への応用

問題。 $w=(a,b,c,d)$ とする。

関数 $f(x,w) = a \tanh(bX) + c \tanh(dX)$ のとき

集合 $W_0 = \{w \in \mathbf{R}^4, (\forall x)\ f(x,w)=0\}$ が代数多様体であることを示せ。

答。関数 $g_k(w) = ab^{2k+1} + cd^{2k+1}$ とおくとテーラー展開

$f(x,w) = \Sigma_{k=0}^{\infty} s_k\, g_k(w)\, x^{2k+1}$ であるから (s_k : 係数）

$W_0 = \{ w \in \mathbf{R}^4; g_k(w)=0\ (\forall k) \}$である。イデアル I_k を

$I_k = \langle g_0, g_1, \ldots, g_k \rangle$ とおくと $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$は途中の k で止まる。その k に対して $W_0 = \mathbf{V}(I_k)$ となる。

4　代数と幾何の関係

代数多様体の定義イデアル

$V \subset \mathbf{R}^n$を代数多様体とする。V 上で零になる多項式全体の集合を $\mathbf{I}(V)$ と書く。

$$\mathbf{I}(V) = \{f(x) \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \; ; \; f(x) = 0 \; (\forall x \in V) \}$$

とおくと $\mathbf{I}(V)$はイデアルである。これを代数多様体 V の定義イデアルという。

例

(1) $I=\langle x^2y^3\rangle$

$\mathbf{V}(I)=\{(x,y)\ ;\ xy=0\}$

$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\langle xy\rangle$

(2) $I=\langle (x+y)^2+(x^3+y^3)^2\rangle$

$\mathbf{V}(I)=\{(x,y);\ x+y=0\}$

$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\langle x+y\rangle$

(3) $I=\langle x^2+y^4\rangle$

$\mathbf{V}(I)=\{(x,y)\ ;\ x=y=0\}$

$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\langle x,y\rangle$

(4) $I=\langle x^2+y^4+1\rangle$

$\mathbf{V}(I)=$空集合

$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\mathbf{R}[x,y]$

包含関係の逆転(3)

定理4　$\mathbf{I}(V) \supset \mathbf{I}(W) \Leftrightarrow V \subset W$。

証明 (<=) 「$f \in \mathbf{I}(W)$ ならば $f \in \mathbf{I}(V)$ 」を示せばよい。

$f \in \mathbf{I}(W)$ とすると $(\forall x \in W)\ f(x)=0$。

従って特に（$\forall\ x \in V)\ f(x)=0$。すなわち $f \in\ \mathbf{I}(V)$。

(=>)「$x \in V$ ならば $x \in W$ 」を示せばよい。

$x \in\ V$ とすると、$(\forall f \in \mathbf{I}(V)$ ）$f(x)=0$。

従って特に $(\forall f \in \mathbf{I}(W)$ ）$f(x)=0$。すなわち $x\ \in\ W$。（証明終）

代数多様体と定義イデアル　例

例。$I=<x^3>$, $J=<x^2+y^2>$ とすると $\mathbf{V}(I)=\{(x,y);x=0\}$

$\mathbf{V}(J)=\{(x,y);\ x=y=0\}$ だから $\mathbf{V}(I)\supset\mathbf{V}(J)$ が成り立つ。

しかし「$I\subset J$」は成り立たなかった。

いっぽう　$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=<x>$, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))=<x,y>$ だから

$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))\subset\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$ は成り立っている。

代数多様体と定義イデアル

(1) 定理4より **I**(V)=**I**(W) ならば V=W が成り立つ。

I は「代数多様体⇒定義イデアル」の1対1対応を与えている。

(2) **V**(I)=**V**(W) でも I=W は成り立たない。

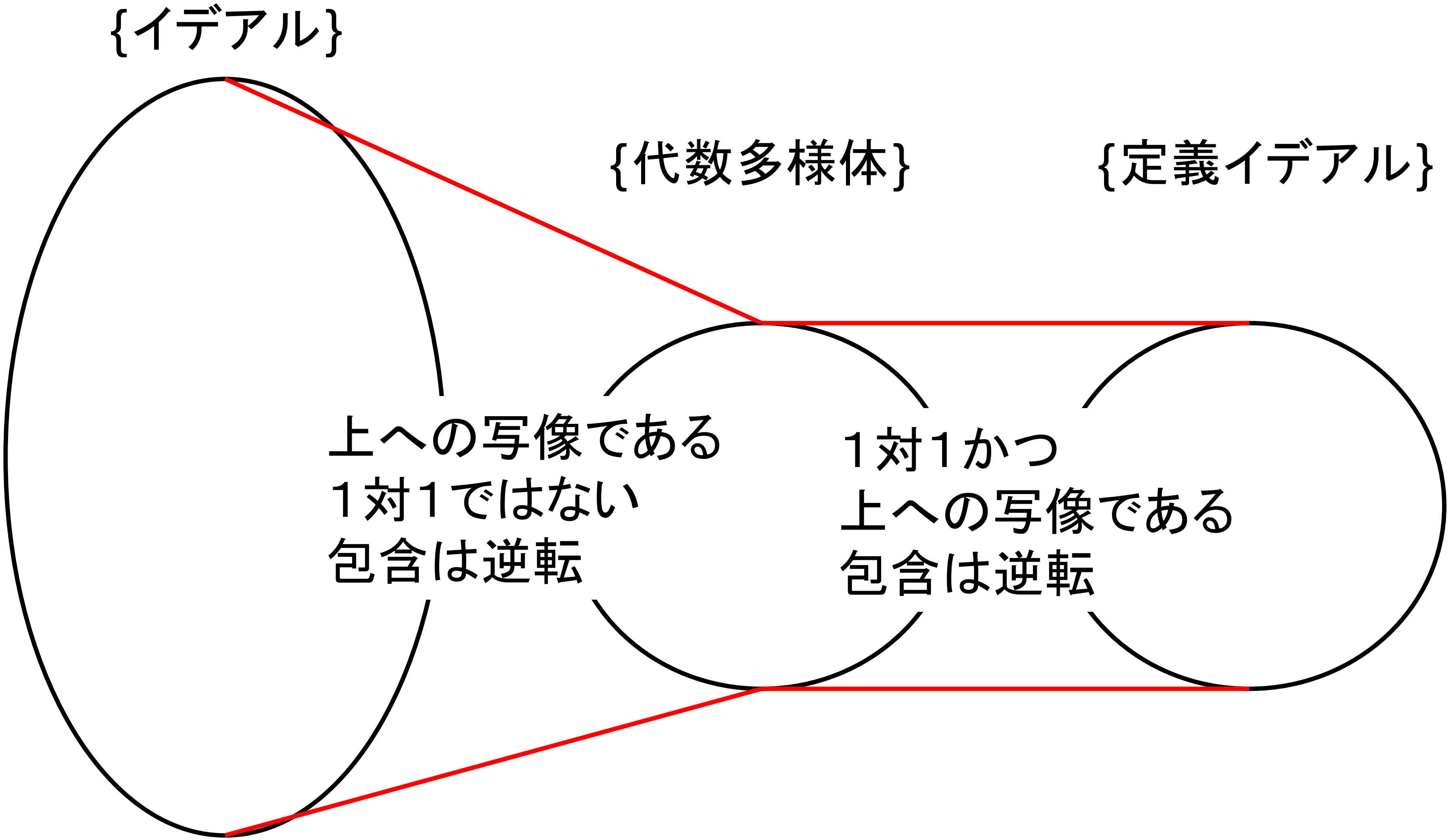
Vは「イデアル⇒代数多様体」は1対1対応ではない。

Vは「定義イデアル⇒代数多様体」の1対1対応を与えている。

定理5　任意の代数多様体 V について **V**(**I**(V))=V 。

定理6　任意の定義イデアル I について **I**(**V**(I))=I 。

写像　$\{ I \} \Rightarrow \{ V(I) \} \Rightarrow \{I(V(I))\}$



なぜ定義イデアルが必要なのか

たとえば $I = \langle (x^2-2xy+z)^2+(y^2-z)^2 \rangle$ とする。
代数多様体 **V**(I) の特異点の集合を見つけたいとき
イデアル I についての代数計算では、ある点 x が **V**(I)
の特異点かどうかの判断を行うことができない。定義イデアル **I**(**V**(I)) を用いると特異点かどうかの判断を行うことができる。

⇒ 特異点かどうか判断できると何がうれしいのか

⇒ 次回以降に述べていく。

（注）代数閉体のときに成り立つ関係

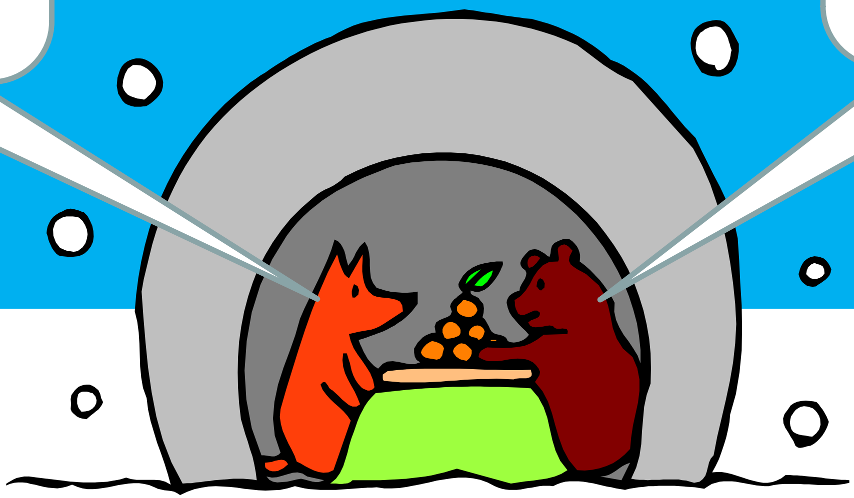
一般に定義イデアルは根基イデアルという特別な性質を持つイデアルであることを示すことができる。

代数閉体のときには、根基イデアルはある代数多様体の定義イデアルでもあり、根基イデアルと定義イデアルは、１対１かつ上への写像で対応することがわかるので（ヒルベルトの零点定理）、代数多様体を調べる問題は、根基イデアルを調べる問題と等価になる。実数体ではそうではない。

5　まとめ

イデアル I の
零点全体が
V(I) である。

代数多様体V
上で零になる
関数全体が
I(V)である



まとめ

○ 「多項式＝0」で表される図形を代数多様体という。

○ 代数多様体 V 上で零になる多項式全体は

定義イデアル **I**(V) である。

○ V $\Leftrightarrow$ **I**(V) は全単射。

○ 次回以降、V の図形的な性質を調べるために **I**(V) を利用していく。

練習問題

1．多項式環 $\mathbf{R}[x,y]$ の各イデアル I について $\mathbf{V}(I)$ と $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ を求めよ。

(1) $I=\langle x^3-y^3\rangle$

(2) $I=\langle (x^2-y^4)^2+(y^4-x^8)^2\rangle$

2．実空間 $\mathbf{R}^2$の代数多様体 V であって $\mathbf{I}(V)=\langle x^2+1\rangle$ となるものは存在しないことを示せ。