初めての代数幾何学 ③

東京工業大学　渡辺澄夫

1　復習

復習1

① {V; 代数多様体} ⇔ {$\mathbf{I}(V)$;定義イデアル} は全単射。

② グレブナー基底　$<LT(I)>=<LT(f_1), LT(f_2), \cdots, LT(f_K)>$

今回

③　特異点

1　特異点

解析同型

U, V を $\mathbf{R}^n$ の（ユークリッド距離における）開集合とする。

定義。U と V が解析同型である。
$\Leftrightarrow$ 全単射な写像 $f: U \to V$ であって
f, f^{-1} のどちらも解析写像であるようなものが存在する。

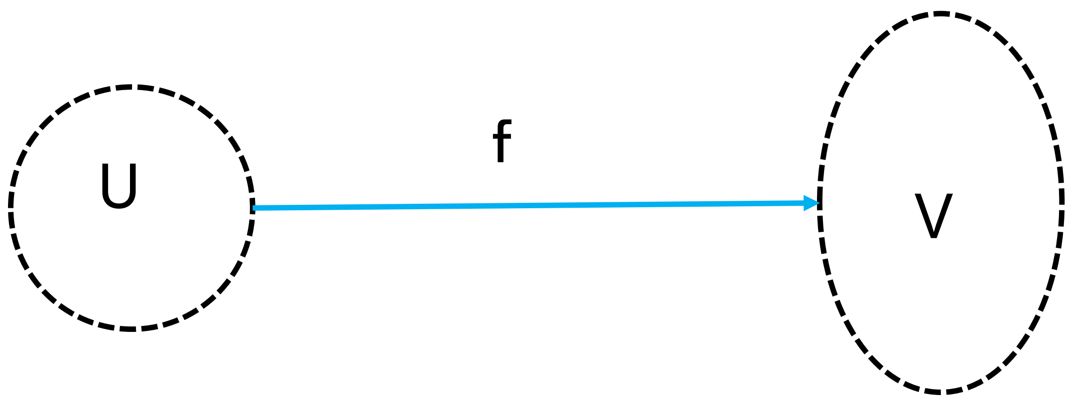
注：$f: U \to V$ が解析写像（関数）であるとは U 上の任意の点におけるテーラー展開が絶対収束すること（C^ω級）。

注：$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ のとき $x^k = \Pi_{j=1}^{n} x_j^{k_j}$ と書く。$f(x)$ の点a におけるテーラー展開 $f(x) = \Sigma_k a_k(x-a)^k$ が絶対収束するとは $\Sigma_k |a_k| \, \|x-a\|^k < \infty$。

逆写像の定理

U, V が $\mathbf{R}^n$ の開集合で関数 $f:U\to V$ が全射であり、f は U 上で解析写像であるとする。$f(x) = (f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$ と書く。

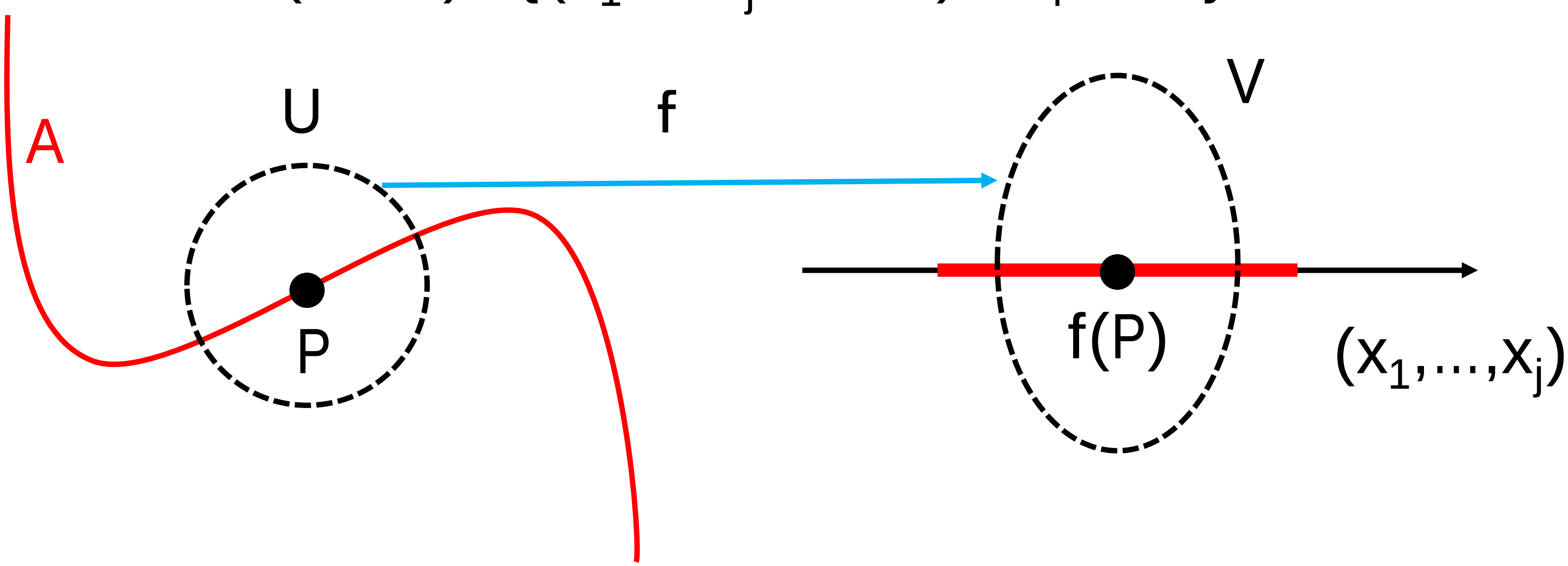
逆関数の定理。 ヤコービ行列 $(\partial f_i/\partial x_j)$ （$n\times n$行列）が U のすべての点で逆行列を持つとき U と V は解析同型である。



集合 A の非特異点の定義

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 A を考える(空集合でないとする)。
集合 A の点 P が(次元 j の)非特異点であるとは P を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合 U、ある開集合 V、および UとVの解析同型を与える写像
f: U → V が存在して次式が成り立つことである。

$$f(A\cap U)=\{(x_1,\dots,x_j,0,\dots,0)\ ;\ x_i\in\mathbf{R}\}\cap V.$$



非特異点の判定

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし、実数への解析関数 $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ が与えられているとする。集合 A を次式で定義する。

$$A=\{x\in U\ ;\ f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_k(x)=0\ \}.$$

定理（非特異点の判定）。 ヤコービ行列 $(\partial f_i/\partial x_j)$ $(1\leqq i,j\leqq k)$ が U のある点 x_0 で逆行列を持つとき x_0 は A の非特異点である。

証明

関数 $\{f_i(x)\}$ が $1 \leqq i \leqq k$ でのみ与えられているので、k よりも大きい i については、$f_i(x)=x_i$ と定めることにする。

すると $\{f_i(x)\ ;\ 1 \leqq i \leqq n\}$ は x_0 を含む開集合で十分小さいものを U として V=f(U) とすることで逆関数の定理を満たす。定理の仮定から

$$f(x)=(0,\ldots,0,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)$$

であるから、x_0 が非特異点であることが証明できた。

（注意）この証明から陰関数定理が得られる。

非特異点の判定（一般）

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし、実数への解析関数 $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ が与えられているとする。集合 A を次式で定義する。

$$A=\{x\in U\ ;\ f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_k(x)=0\ \}.$$

定理（非特異点の判定）。 ヤコービ行列 $(\partial f_i/\partial x_j)$ $(1\leqq i\leqq k, 1\leqq j\leqq n)$ が U のある点 x_0 でのランクが k であるとき x_0 は A の非特異点である。

（証明）ランクが k であるから $\{1\leqq j\leqq n\}$ の中から k 個のものをうまく取り出して、前の定理が成り立つようにできる。

例1

$V = V(\langle y-x^2 \rangle)$

$J(x,y)=(-2x,\ 1)$

常にランクは1だから
特異点はない。

$V = V(\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle)$

$J(x,y)=(2x,\ 2y)$

常にランクは1だから
特異点はない。

原点はＶ上の点で
はない。

2　代数多様体の特異点

既約な代数多様体　復習

代数多様体 V が既約であるとは
　$V=V_1 \cup V_2$ ならば $V=V_1$ または $V=V_2$

イデアル I が素イデアルであるとは
　$f(x)g(x) \in I$ ならば $f(x)\in I$ または $g(x)\in I$

定理。代数多様体 V が既約である
　　$\Leftrightarrow$ 定義イデアル I(V) が素イデアルである

既約代数多様体　の特異点

V を $\mathbf{R}^n$ の既約代数多様体とし I(V) をその定義イデアルとする。

$\mathbf{I}(V)=<f_1(x),f_2(x),\ldots f_k(x)>$

であるとき、ヤコービ行列 $J=(\partial f_i/\partial x_j)$　$(1\leqq i\leqq k, 1\leqq j\leqq n)$ の V 上でのランクの最大値を R とする。

定義　既約代数多様体 V 上の点 P における J(P)のランクが R よりも小さいとき、P を V の特異点という。

注意。既約代数多様体 V の特異点は、「集合 V の次元 (n-R) の非特異点」にはならない。

特異点の集合

定義。既約代数多様体 V の特異点全体の集合を Sing(V) と書く。

定理。Sing(V) は代数多様体であり、V の真部分集合である。

（証明）ヤコービ行列 $J=(\partial f_i/\partial x_j)$ $(1\leqq i\leqq k, 1\leqq j\leqq n)$ の要素はすべて多項式である。Jの最大のランクをRとすると、Sing(V)は、Jの R×Rの小行列式がすべて0である集合とVの共通集合と等しいから代数多様体である。Jの最大のランクがRだからSing(V)はV と一致しない。

臨界点と特異点

定義。U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし、解析関数 $f:U\to R$ が与えられているとする。点 $x0 \in U$ が f の臨界点(critical point)であるとは

$$\partial f/\partial x_i=0\ (1\leqq i\leqq n)$$

が成り立つことを言う。

注意:極大点、極小点は臨界点である。臨界点であっても極大でも極小でもない点はありうる。

注意:代数多様体 $V=V(\langle f\rangle)$ において点 x がVの特異点であれば臨界点である。臨界点であって特異点でない点はありうる。

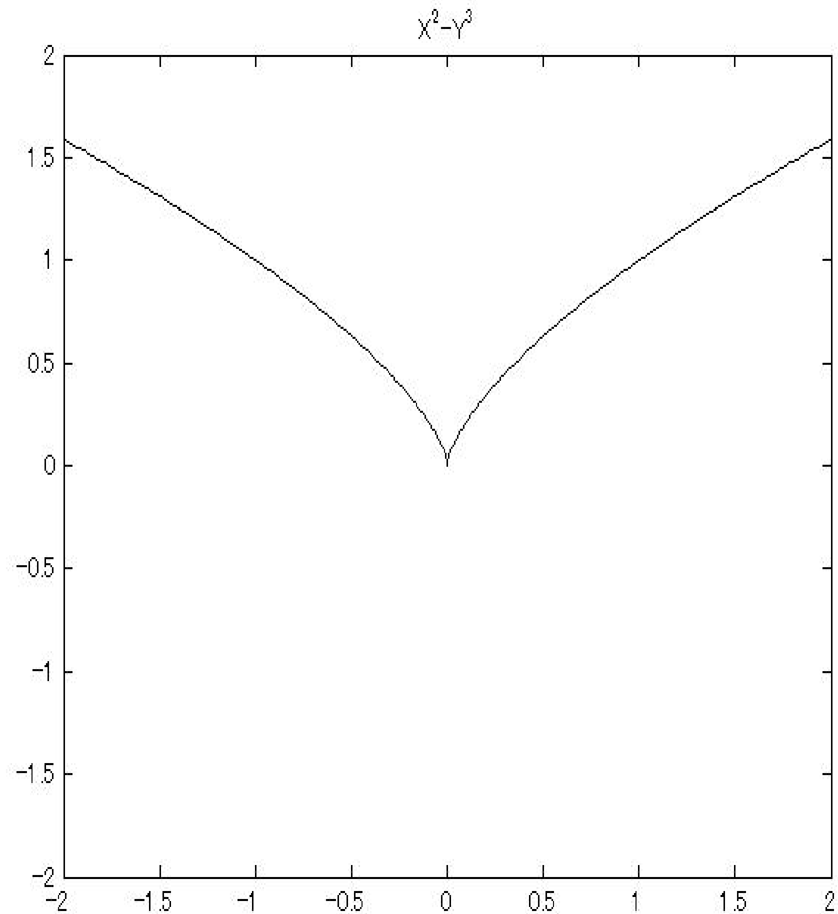
3　例

例2

$V= V(<x^2-y^3>)$
$J(x,y)=(2x,-3y^2)$

原点以外はランク1。
原点はランク0。
原点は特異点。
原点では接線はない。

注意。$V= V((x^2-y^3)^2)$ だが
$\mathbf{I}(V) \neq <(x^2-y^3)^2>$なので
$J=(2x(x^2-y^3)^2,-3y^2(x^2-y^3)^2)$
では判定できないことに
注意(これは常にランク0)。



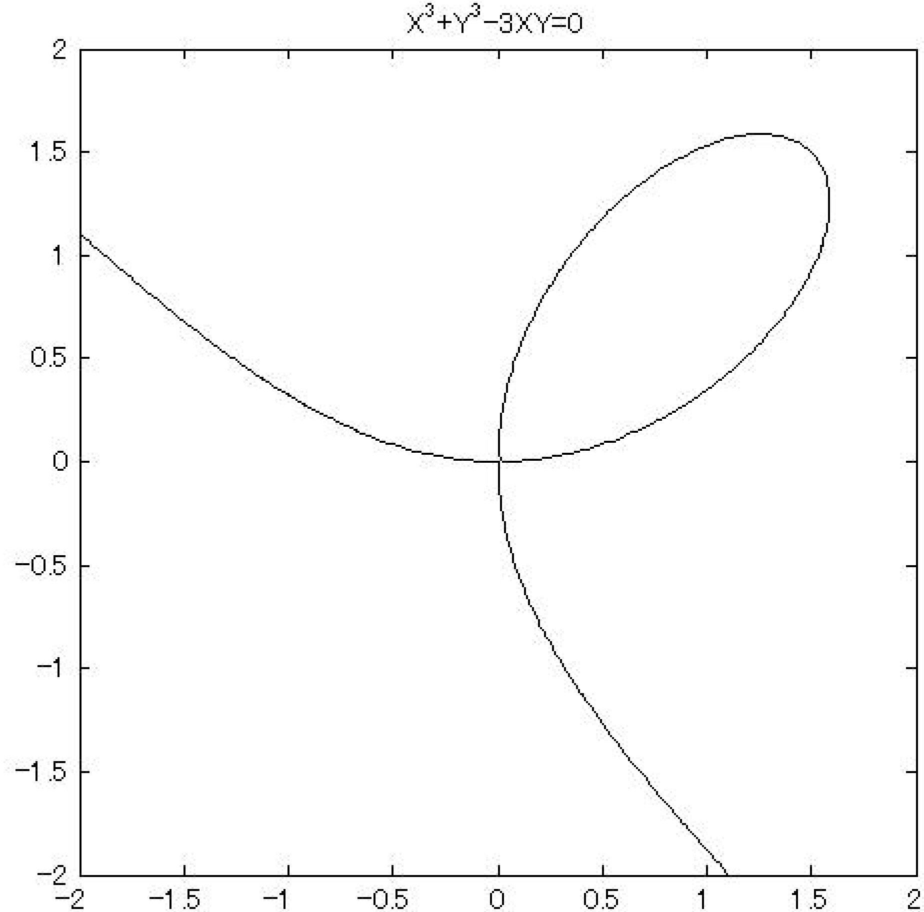
例3

$V = V(<x^3+y^3-3xy)$

$J(x,y)=(3x^2-3y, 3y^2-3x)$

原点以外はランク1。
原点はランク0。
原点は特異点。

原点では接線は
ない。

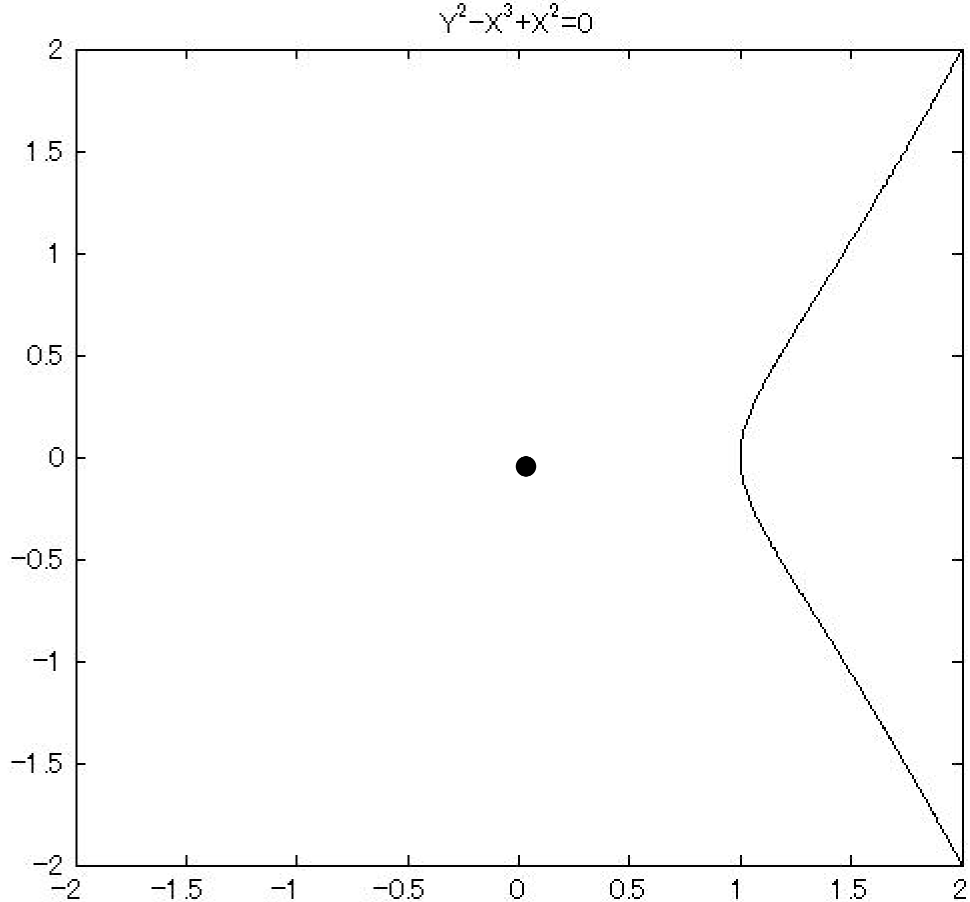


例4

$V = V(\langle y^2 - x^3 + x^2 \rangle)$

$J(x,y) = (-3x^2 + 2x, -2y)$

原点以外はランク1。
原点はランク0。
原点は特異点。



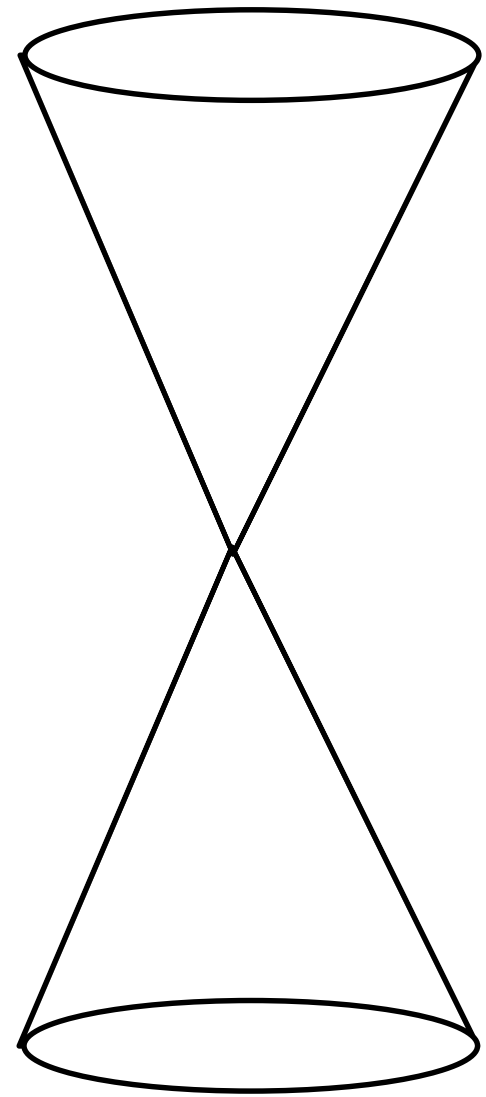
例5

$V = V(\langle z^2-x^2-y^2 \rangle)$

$J(x,y) = (-2x, -2y, 2z)$

原点以外はランク1。
原点はランク0。

原点は特異点。



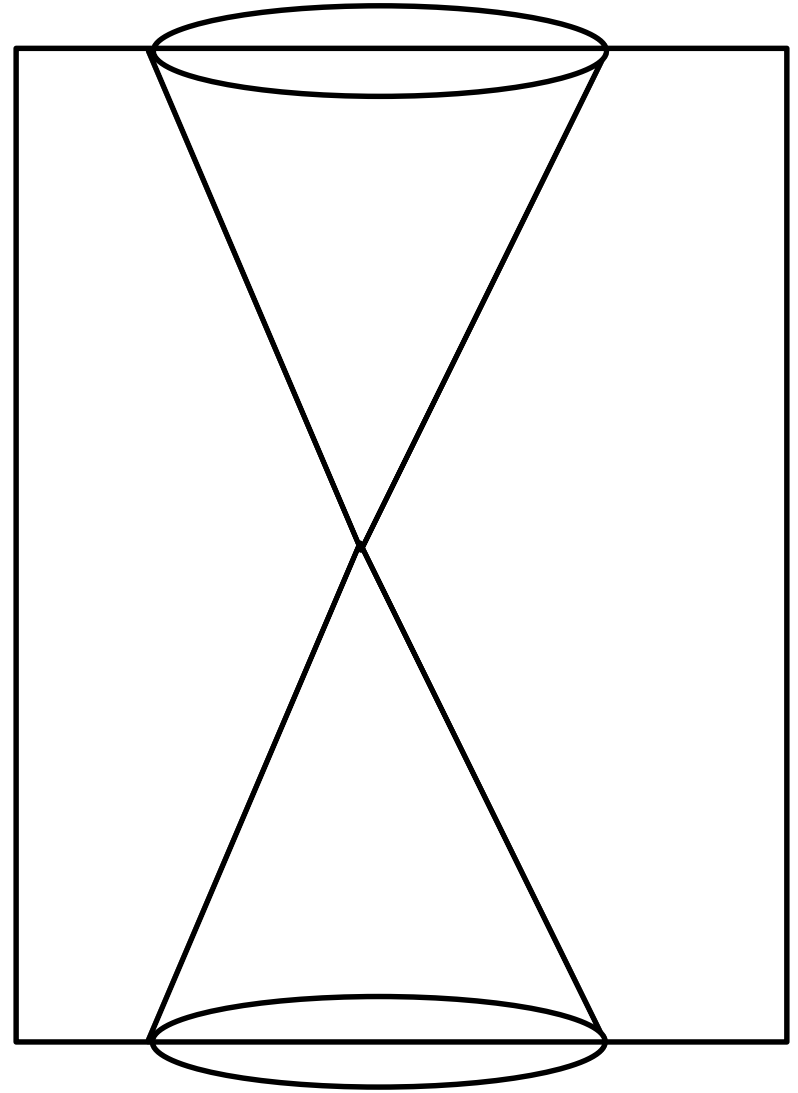
例6

$V = V(\langle z^2-x^2-y^2, y-k \rangle)$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -2x, & -2y, & 2z \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

$k=0$のとき
原点は特異点。

$k \neq 0$のとき
特異点なし。



４　ブローアップ(初等版)

なぜ　ブローアップか

代数幾何を学ぶとき

☆　射影空間→ブローアップ→特異点の解消

の順番に習うが、なぜこうするのかというと

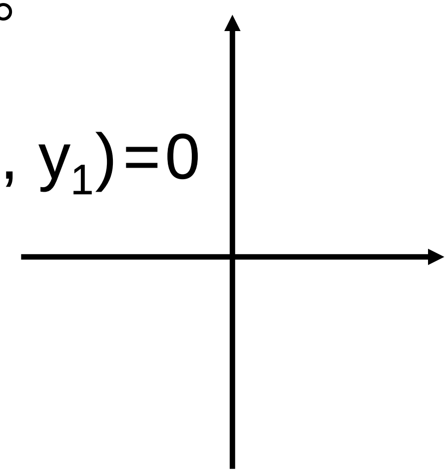
(1) 代数多様体の特異点を解消したい。
(2) 特異点の解消のためには、ブローアップが必要。
(3) ブローアップを定義するためには射影空間が必要。

という理由があるからである。☆の順番に習う前に
まず、何をしたいかをみておくことにする。

点を中心にした代数曲線のブローアップ

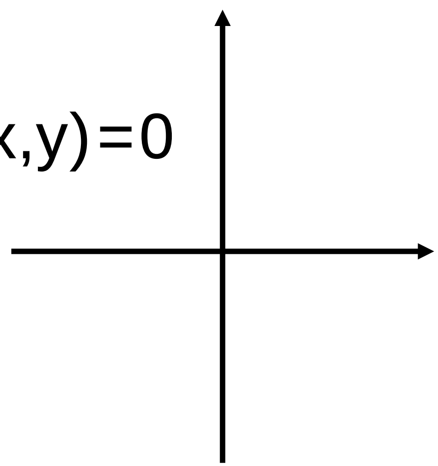
代数曲線 $f(x,y)=0$ が特異点として持つとする。
特異点を中心にしてブローアップを行うと特異点が
マイルドになっていき最後にはなくなる。

$f(x_1 y_1,\ y_1)=0$

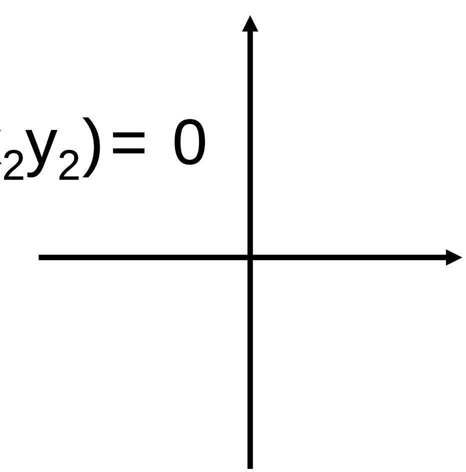


$x = x_1 y_1$
$Y = y_1$

$f(x,y)=0$



$f(x_2,\ x_2 y_2)= 0$



$x=x_2$
$y=x_2 y_2$

例1

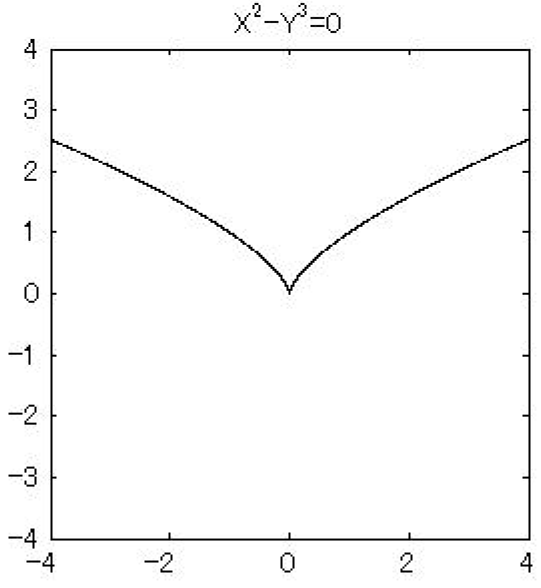
$x^2 - y^3 = 0$

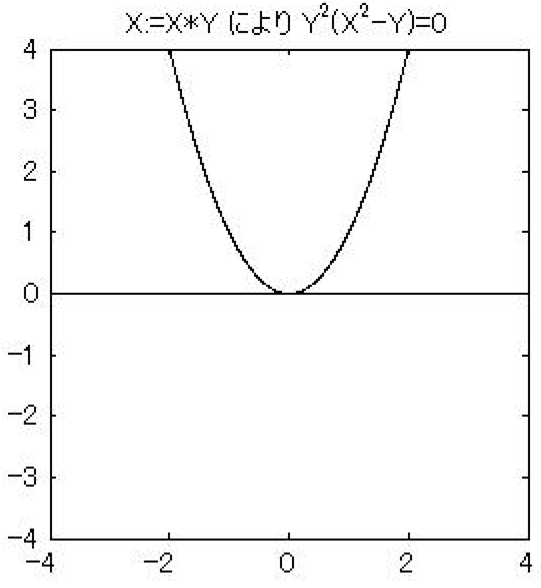
$x = x_1 y_1$

$y = y_1$

とおくと

$y_1^2(x_1^2 - y_1) = 0$





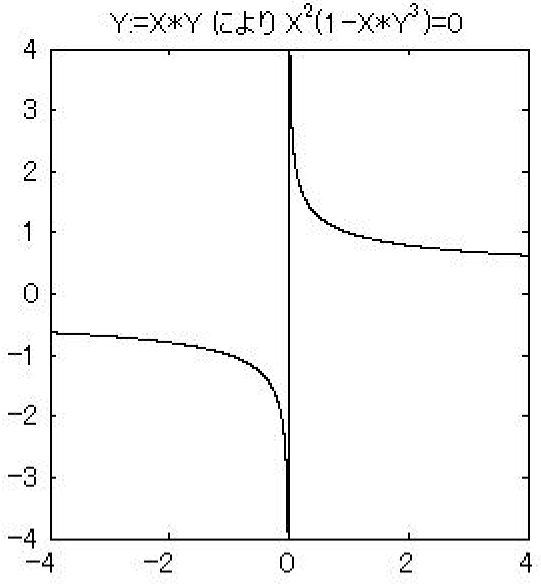
$x^2 - y^3 = 0$

$x = x_2$

$y = x_2 y_2$

とおくと

$x_2^2\,(1 - x_2 y_2^3) = 0$



例2

$x^3+y^3-3xy=0$

$\quad x=x_1y_1$

$\quad y=y_1$

とおくと

$y_1^{\,2}(x_1^{\,3}y_1+y_1-3x_1)=0$

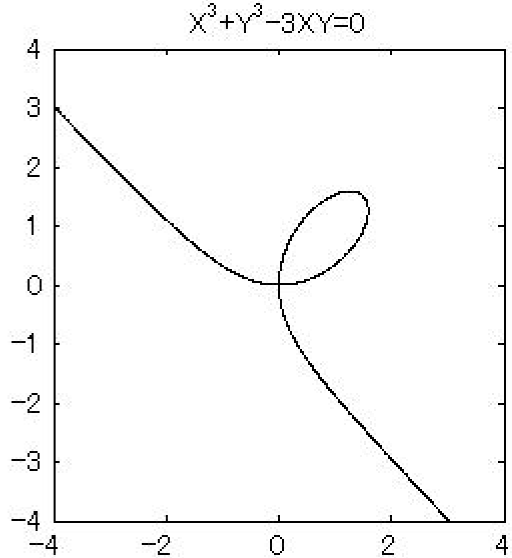
$x^3+y^3-3xy=0$

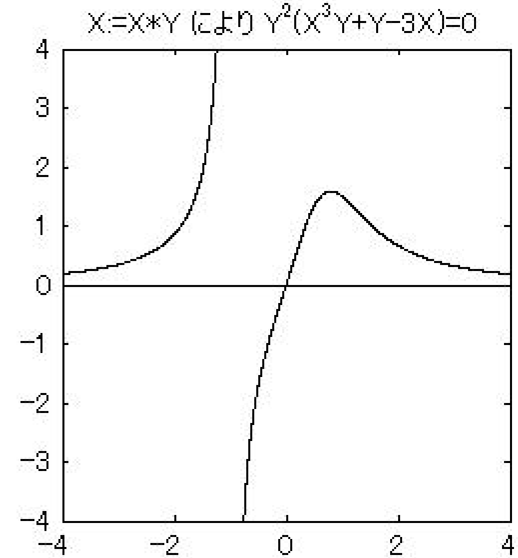
$\quad x=x_2$

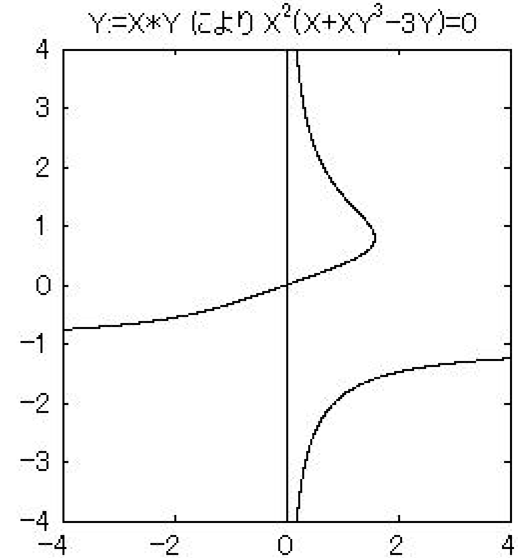
$\quad y=x_2y_2$

とおくと

$x_2^{\,2}\,(x_2+x_2y_2^{\,3}-3y_2)=0$





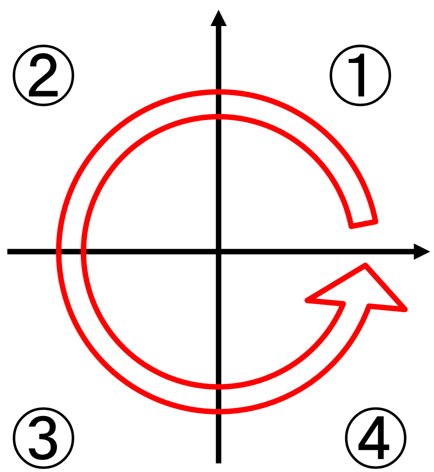


例2

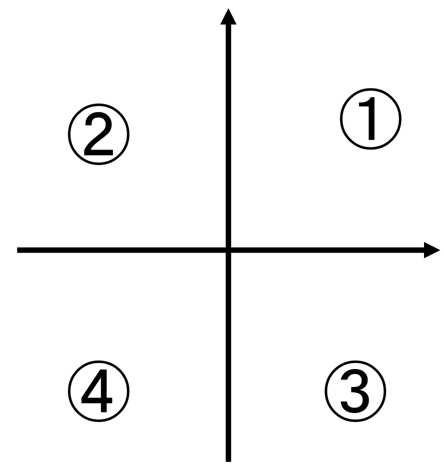
http://watanabe-www.math.dis.titech.ac.jp/users/swatanab/blow_up_1.mp4

点を中心にした平面のブローアップ

代数多様体のブローアップを考える前に、入れ物であるアフィン空間のブローアップを考えておく必要がある。



$$x = x_1 y_1$$
$$y = y_1$$



$$x = x_2$$
$$y = x_2 y_2$$