初めての代数幾何学 ④

東京工業大学　渡辺澄夫

復習

復習1

① {V; 代数多様体} ⇔ {$\mathbf{I}$(V);定義イデアル} は全単射。

② グレブナー基底　$<LT(I)> = <LT(f_1), LT(f_2), \cdots, LT(f_K)>$

③ V の特異点は $\mathbf{I}$(V) のヤコービ行列を使って判定できる。

今日は

④ 射影空間とブローアップ

本日

今日は

☆　射影空間→ブローアップ→特異点の解消

の順番に習う。なぜこうするのかというと

(1) 代数多様体の特異点を解消したい。
(2) 特異点の解消のためには、ブローアップが必要。
(3) ブローアップを定義するためには射影空間が必要。

という理由があるからである。

1　射影空間

同値関係

$\mathbf{R}^{n+1}$ の元で $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) \neq (0,0,\ldots,0)$ のものが作る集合を考える。

$\mathbf{R}^{n+1} - \{(0,0,\ldots,0)\}$ に次の同値関係を定義する。

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) \sim (y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists c\neq 0,\ (x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = c\,(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})$$

射影空間の定義

$\mathbf{R}^{n+1}$ の～による商集合を射影空間 $\mathbf{P}^n$ という。

$$\mathbf{P}^n = (\ \mathbf{R}^{n+1} - \{(0,0,\ldots,0)\}\ ) / \sim$$

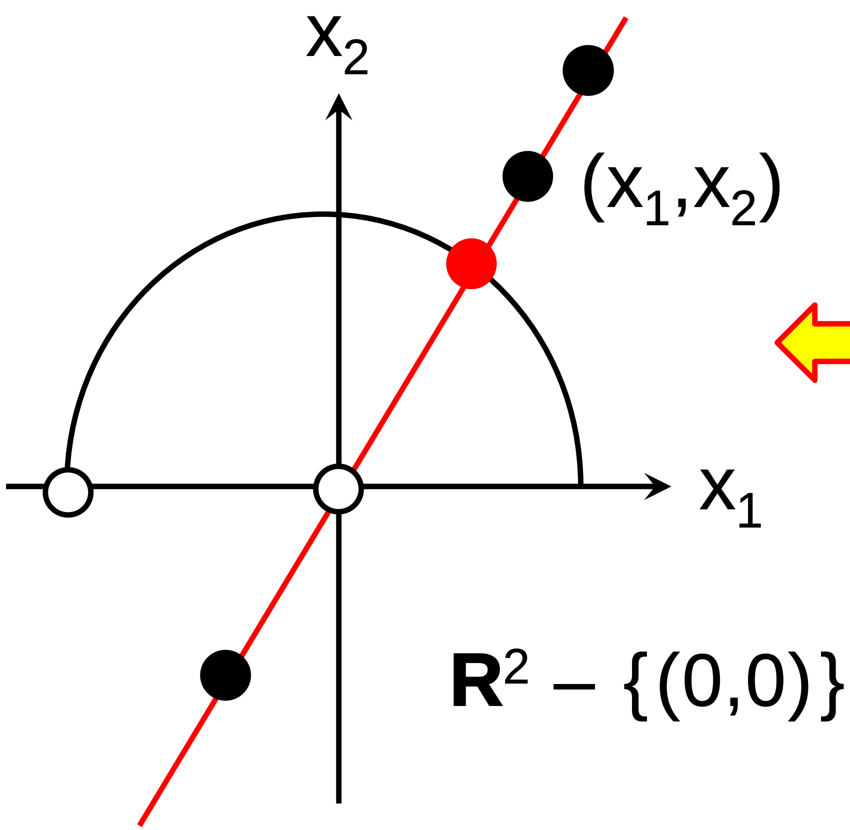
$(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ の同値類を $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ で表す。

例　　$(1:2:-3) = (-2:-4:6)$, $(1:0:1) = (2:0:2)$,
$(1:0:0) = (3:0:0)$
$(0:0:0)$ は $\mathbf{P}^2$ に含まれない。

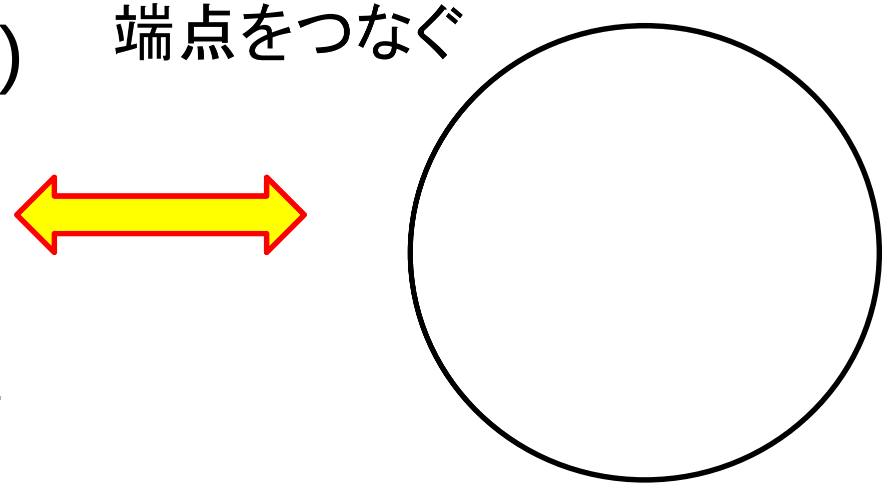
例　射影空間 $\mathbf{P}^1$

$\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ の同値関係は

$(x_1,x_2) \sim (y_1,y_2) \Leftrightarrow \exists c\neq 0,\ (x_1,x_2) = c\,(y_1,y_2)$



円のうち $x_2 \geqq 0$,
端点をつなぐ

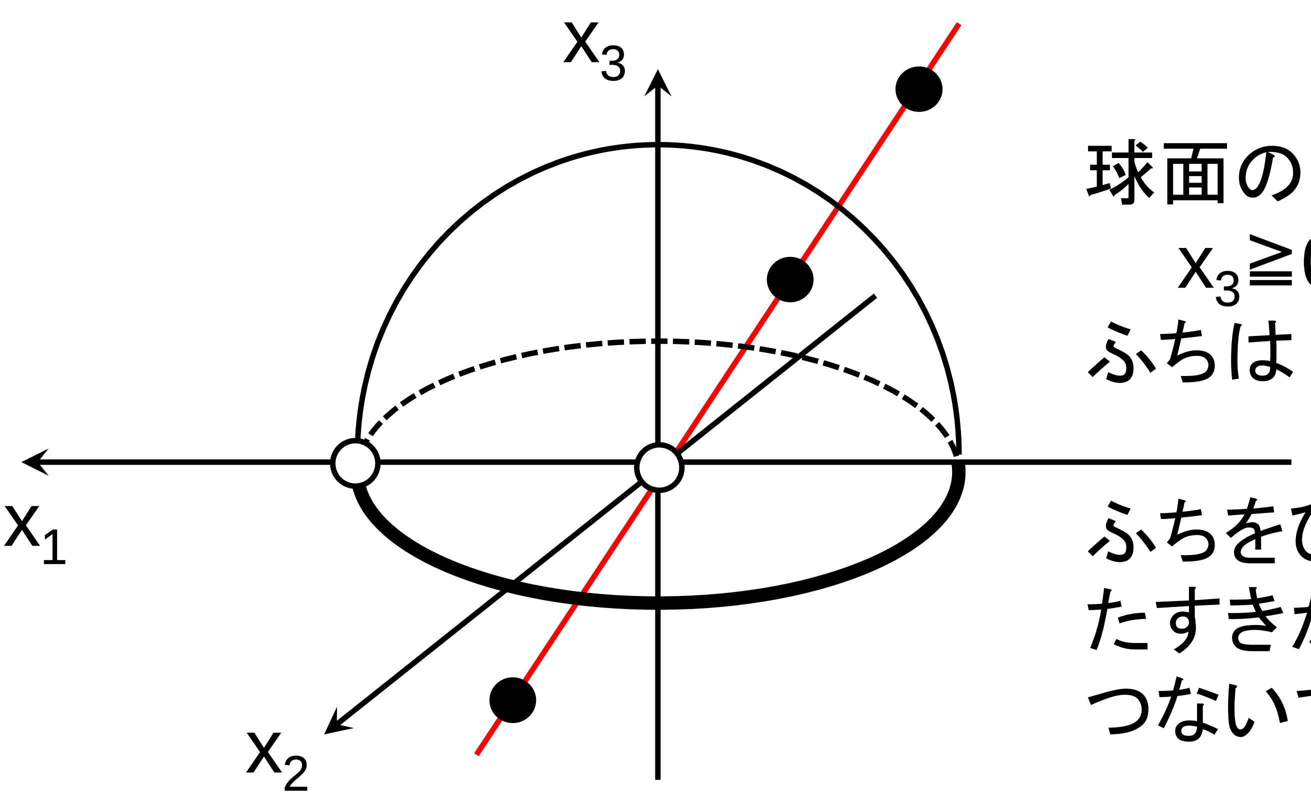


$\mathbf{P}^1$は円周
コンパクト

例　射影空間 $\mathbf{P}^2$

$\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ の同値関係

$(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow \exists c \neq 0,\ (x_1,x_2,x_3) = c(y_1,y_2,y_3)$

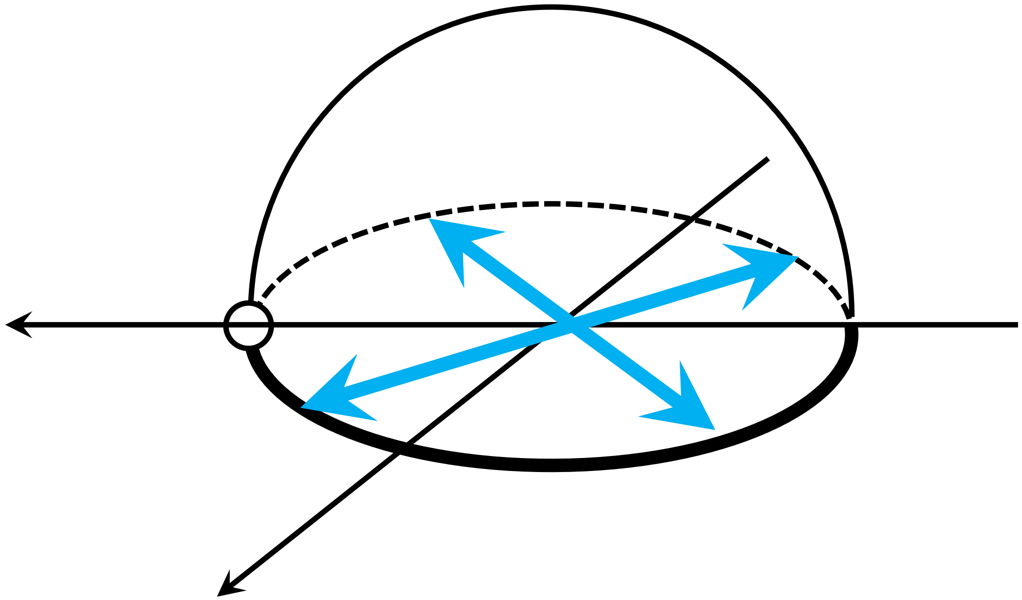


球面のうち
$x_3 \geqq 0$,
ふちは $x_2 \geqq 0$

ふちをひねって
たすきがけで
つないで閉じる

$\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

例　射影空間 $\mathbf{P}^2$



球面上半分のふちをひねってたすきがけでつな
いで閉じる。 コンパクトだが　向き付けできない。
一般に偶数次元の射影空間は向き付けできない。

射影空間の局所座標

射影空間は、1枚のアフィン空間で覆うことはできないが(n+1)枚のアフィン空間で覆うことができる。

射影空間 $\mathbf{P}^n$ に含まれる開集合を

$$U_1=\{(1,x_2,\dots,x_{n+1})\ ;\ (x_2,\dots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^n\}$$
$$U_2=\{(x_1,1,\dots,x_{n+1})\ ;\ (x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^n\}$$
$$\cdots$$
$$U_{n+1}=\{(x_1,x_2,\dots,1)\ ;\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n\}$$

と定義すると　　$\mathbf{P}^n = \cup_{i=1}^{n+1} U_i$

例　射影空間 $\mathbf{P}^2$

$$\mathbf{P}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \ni (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$$

$$U_1 = \{ (1, x_2, x_3) \}$$
$$U_2 = \{ (x_1, 1, x_3) \}$$
$$U_3 = \{ (x_1, x_2, 1) \}$$

注意: U_1 の原点 (1,0,0) は U_2, U_3 に含まれない。
U_1 の無限遠点 $(1,\infty,1)$ は U_3 の原点(0,1,0) 。
U_1 の無限遠点 $(1,1,\infty)$ は U_3 の原点(0,0,1) 。

この状況を「射影空間はアフィン空間の張り合わせで作れる」と言うことがある。

２　射影代数多様体

代数多様体をアフィンから射影に

$\mathbf{P}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \ni (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$

$$U_1 = \{ (1, x_2, x_3) \}$$
$$U_2 = \{ (x_1, 1, x_3) \}$$
$$U_3 = \{ (x_1, x_2, 1) \}$$

アフィン空間 U_1 上の代数多様体を射影空間全体まで広げるにはどうしたらよいだろうか。

注意:なぜそんなことをしたいの? 射影空間はコンパクトだから。コンパクトだと何がうれしい?

例　射影空間 $\mathbf{P}^2$ の代数多様体

$\mathbf{P}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \ni (x:y:z)$
$U_1 = \{(1,y,z)\}$, $U_2 = \{(x,1,z)\}$, $U_3 = \{(x,y,1)\}$

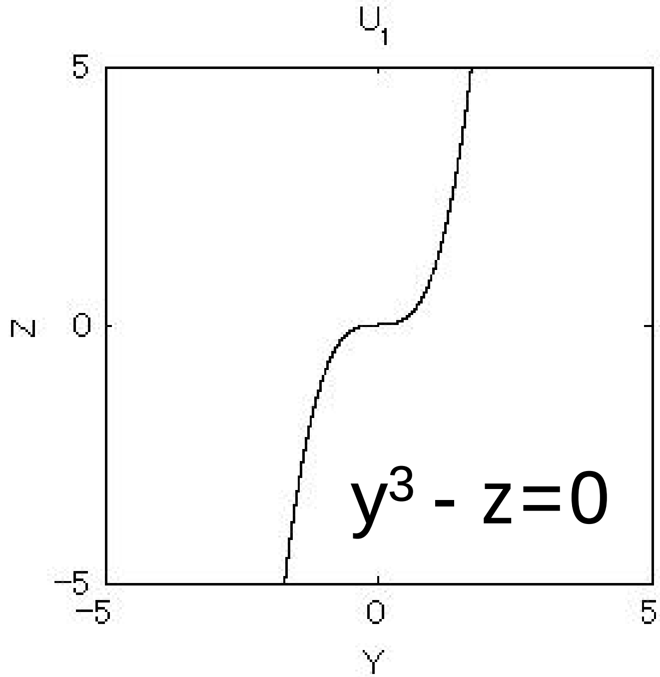
U_1のアフィン代数多様体 $y^3 - z=0$ は

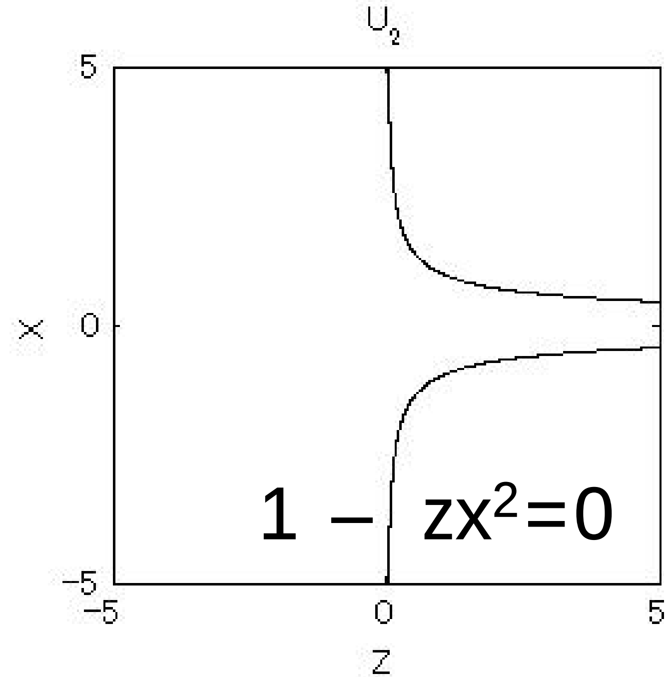
$(x:y:z) \in \mathbf{P}^2$ では　$(y/x)^3 - z/x=0$
　$\to$　射影代数多様体 $y^3 - zx^2=0$（斉次式）

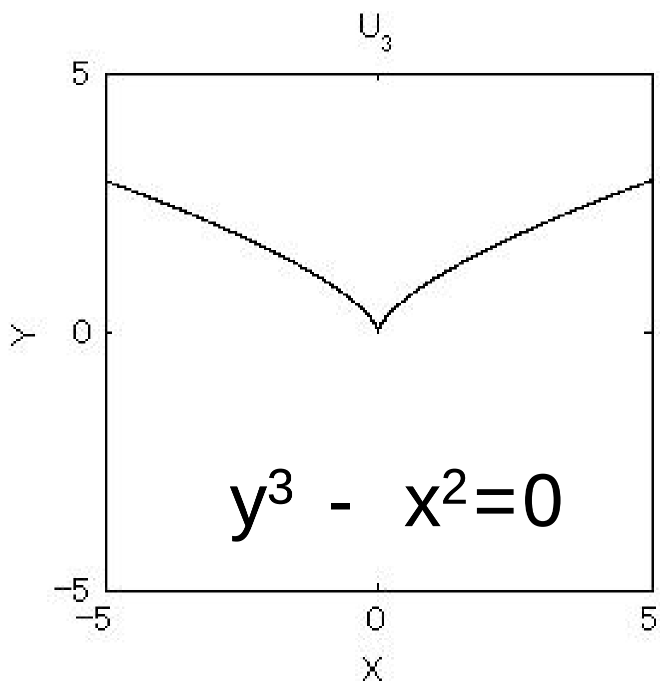
U_2 ではアフィン代数多様体　$1 - zx^2=0$
U_3 ではアフィン代数多様体　$y^3 - x^2=0$

U_1には特異点はないが U_3 には特異点がある・・・。

例 射影代数多様体 $\mathbf{P}^2$







アフィン代数多様体
$y^3 - z=0$ を射影空
間に広げて別の座
標で見た・・・。
この手続きを一般化
すると・・・。

斉次式

$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}]$ の元

$$f\,(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

$$= \Sigma\, a_{k_1k_2\cdots k_{n+1}}(x_1)^{k_1}(x_2)^{k_2}\cdots(x_{n+1})^{k_{n+1}}$$

において $k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}$ が一定であるとき f を斉次式という。

例　$x^3+3x^2y+z^3$ は斉次式だが　x^3+3x+z^2　は斉次式でない。

斉次部分

$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}]$ の元 f について

$$f\,(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

$$= \Sigma\, a_{k_1k_2\cdots k_{n+1}}(x_1)^{k_1}(x_2)^{k_2}\cdots(x_{n+1})^{k_{n+1}}$$

において $k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}$ が一定である部分の和を f を斉次部分という。

例　$x^4+2x^2y+z^3$ においてx^4 と $2x^2y+z^3$ はそれぞれ斉次部分である。

斉次化

多項式 $y^3 - z \in \mathbf{R}[y,z]$ は

$$x^3 \{(y/x)^3 - z/x\} = y^3 - zx^2$$

によって $\mathbf{R}[x,y,z]$ の斉次式に変換できる。

任意の多項式に対して同様の手続きを行うことができる。これを多項式の斉次化という。

（注意）計算上 $x \neq 0$ であることが必要であるが最後の式は $x=0$ の代入もできる。

斉次イデアル

$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}]$ のイデアル I について、任意の $f \in I$ の任意の斉次部分が I に含まれているとき I を斉次イデアルという。

斉次イデアル I は有限個の斉次式により生成されることを証明することができる。

（注意） 斉次イデアルには斉次でない多項式も含まれている。$\langle x^2-y^2, x^3+y^3 \rangle$ は斉次イデアルであるが $x^2-y^2+x^3+y^3$ は斉次ではない。しかし、その斉次部分はイデアルに含まれている。

イデアルの斉次化

$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ のイデアル I について、すべての $f \in I$ の斉次化を行って得られる多項式を含む最小のイデアルは $\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}]$の斉次イデアルである。これを**イデアルの斉次化**という。

例　$I=<y - w^2, z - w^3> \subset \mathbf{R}[y,z,w]$
$y - w^2$の斉次化は $xy - w^2$であり、$z - w^3$の斉次化は $x^2z - w^3$ であるが I の斉次化は $J=<xy - w^2, x^2z - w^3>$ではない。実際、$z-yw \in I$であるが, この斉次化 $xz-yw$ は Jに含まれない。Iの生成元の斉次化だけではイデアルの斉次化になるとは限らない。

斉次イデアルと射影代数多様体

$\mathbf{P}^n$の部分集合で有限個の斉次式の共通零点で定義されるものを射影代数多様体という。

これより斉次イデアル I の共通零点全体の集合は射影代数多様体 **V**(I) になる。

射影代数多様体 V 上で零になる多項式全体は斉次イデアルであり **I**(V) と書く。

射影多様体と斉次定義イデアルは、全単射に対応することを示すことができる。

代数多様体：アフィンから射影へ

射影代数多様体が与えられたとき、その部分集合として各アフィン代数多様体はユニークに定まる。

しかし、あるひとつのアフィン代数多様体 V が与えられたとき、Vを部分集合とするような射影代数多様体は一般にはユニークではない。

V の定義イデアル I(V) の斉次化によって得られる斉次イデアルの共通零点が作る集合は、V を部分集合とする最小の射影代数多様体である。

次数つき辞書式順序

$\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}]$ の元

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

$$= \Sigma\, a_{k_1 k_2 \cdots k_{n+1}} (x_1)^{k_1} (x_2)^{k_2} \cdots (x_{n+1})^{k_{n+1}}$$

と書いたとき、次数 $k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}$ が大きい順に並べることができる(同じ次数のものは 辞書式順序で並べる)。この順序を次数つき辞書式順序という。

例。 x2y5 > x4y2 > x3y3 > x5 > y 5 > ･･･

代数多様体:アフィンから射影へ

アフィン代数多様体
　→　定義イデアルの生成元の斉次化
　→　射影代数多様体
では必ずしも最小の射影代数多様体にならない。

アフィン代数多様体
　　→定義イデアルの次数つき辞書式
　　　順序でグレブナー基底の斉次化
　　→　射影代数多様体
の手続きを行なうとアフィン代数多様体を含む最小の射影代数多様体が得られることが知られている。

例　射影空間 $\mathbf{P}^3$ の代数多様体

$\mathbf{P}^3 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \ni (x:y:z:w)$

U_1のアフィン代数多様体 $V=\mathbf{V}(I)$, $I=\langle y - w^2, z - w^3\rangle$
の次数つき辞書式順序のグレブナー基底は
$\langle y - w^2, z - yw, wz-y^2\rangle$

$\mathbf{P}^3$ で斉次化$V(xy - w^2, xz - yw, wz-y^2)$
U_2 で $V(x - w^2, xz - w, wz-1) = V(x - w^2, wz-1)$
U_3 で $V(xy - w^2, x - yw, w-y^2) = V(x - yw, w-y^2)$
U_4 で $V(xy - 1, xz - y, z-y^2) = V(xy - 1, z-y^2)$

これはVを含む最小の射影代数多様体。

例　射影空間 $\mathbf{P}^3$ の代数多様体

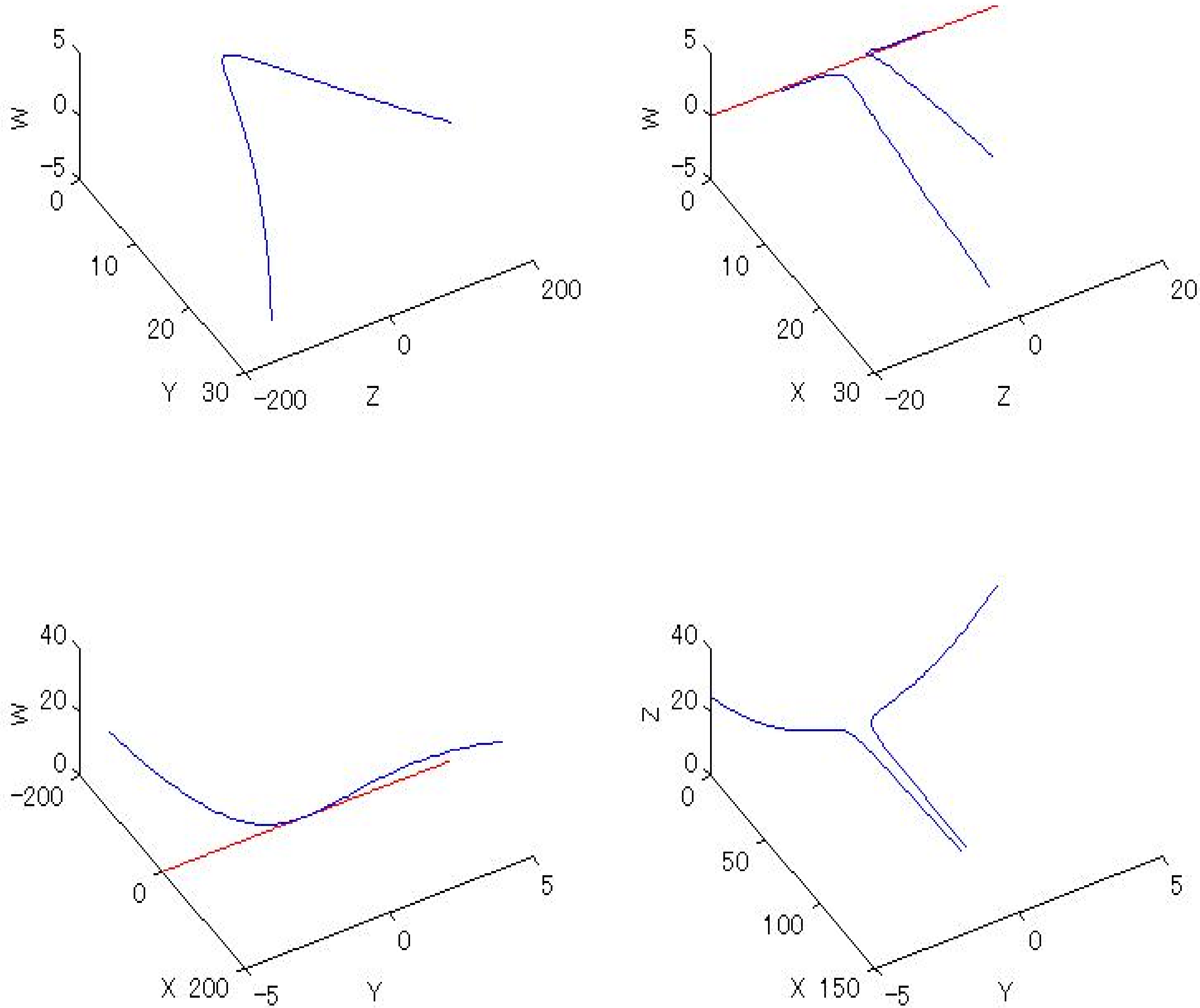
$\mathbf{P}^3 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \ni (x:y:z:w)$

U_1のアフィン代数多様体 $V=\mathbf{V}(I)$, $I=\langle y - w^2, z - w^3 \rangle$
$\langle y - w^2, z - w^3 \rangle$はグレブナー基底ではない。

$\mathbf{P}^3$ で斉次化　$V(xy - w^2, x^2z - w^3)$
U_2 で$V(x - w^2, x^2z - w^3)=V(x - w^2, wz-1) \cup V(x,w)$
U_3 で$V(xy - w^2, x^2 - w^3)=V(x - yw, w-y^2) \cup V(x,w)$
U_4 で$V(xy - 1, x^2z - 1)=V(xy - 1, z-y^2)$

これはVを含む最小の射影代数多様体ではない。

例　射影空間$\mathbf{P}^3$の代数多様体



3　ブローアップ

アフィン空間 $\mathbf{R}^n$ の原点を中心としたブローアップ

$\mathbf{R}^3$ の原点 O を中心としたブローアップとは

$$B_O(\mathbf{R}^3) = \overline{\{((x,y,z),(x:y:z))\ ;\ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 - O\}}$$

これは$\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}^3$の部分集合である。─は、$\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}^3$においてその集合を含む最小の代数多様体のことを意味している。

（注）一般の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$ の場合も同様である。
（注）─のことをザリスキー位相による閉包という。

$\mathbf{R}^2$ の原点を中心としたブローアップ

$\mathbf{R}^2$ の原点 O を中心としたブローアップは

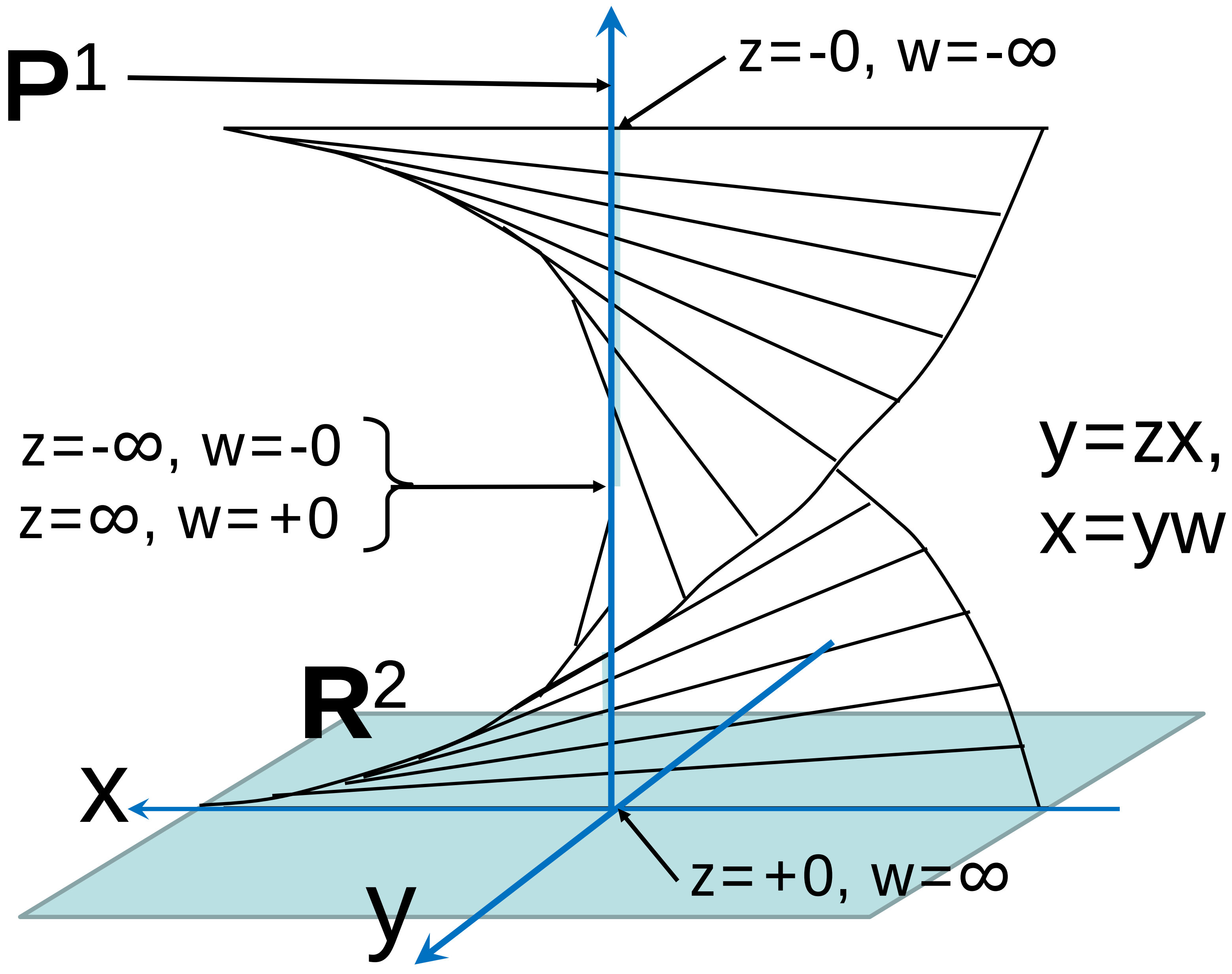
$$B_O(\mathbf{R}^2)=\overline{\{((x,y),(x:y))\ ;\ (x,y)\in \mathbf{R}^2 - O\}}$$

$(x:y)$ は二つの座標 $(1:z)$ と $(w:1)$ で覆える。

$$=\overline{\{(x,y,z)\ ;\ x:y=1:z\} \cup \{(x,y,w)\ ;\ x:y=w:1\}}$$

$$=\overline{\{(x,y,z)\ ;\ y=zx\} \cup \{(x,y,w)\ ;\ x=yw\}}$$

$\mathbf{R}^2$ の原点を中心としたブローアップ



アフィン代多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ の原点を中心としたブローアップ

$V \subset \mathbf{R}^3$ の原点 O を中心としたブローアップとは

$$\overline{B_O(V) = \{((x,y,z),(x:y:z)) \; ; \; (x,y,z) \in V - O\}}$$

これは$\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}^3$の部分集合である。ー は、$\mathbf{P}^2 \times \mathbf{R}^3$において、その集合を含む最小の代数多様体のことを意味している。

（注）一般の $V \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$ の場合も同様である。
（注）ーのことをザリスキー位相による閉包という。

$V \subset \mathbf{R}^2$ の原点を中心としたブローアップ

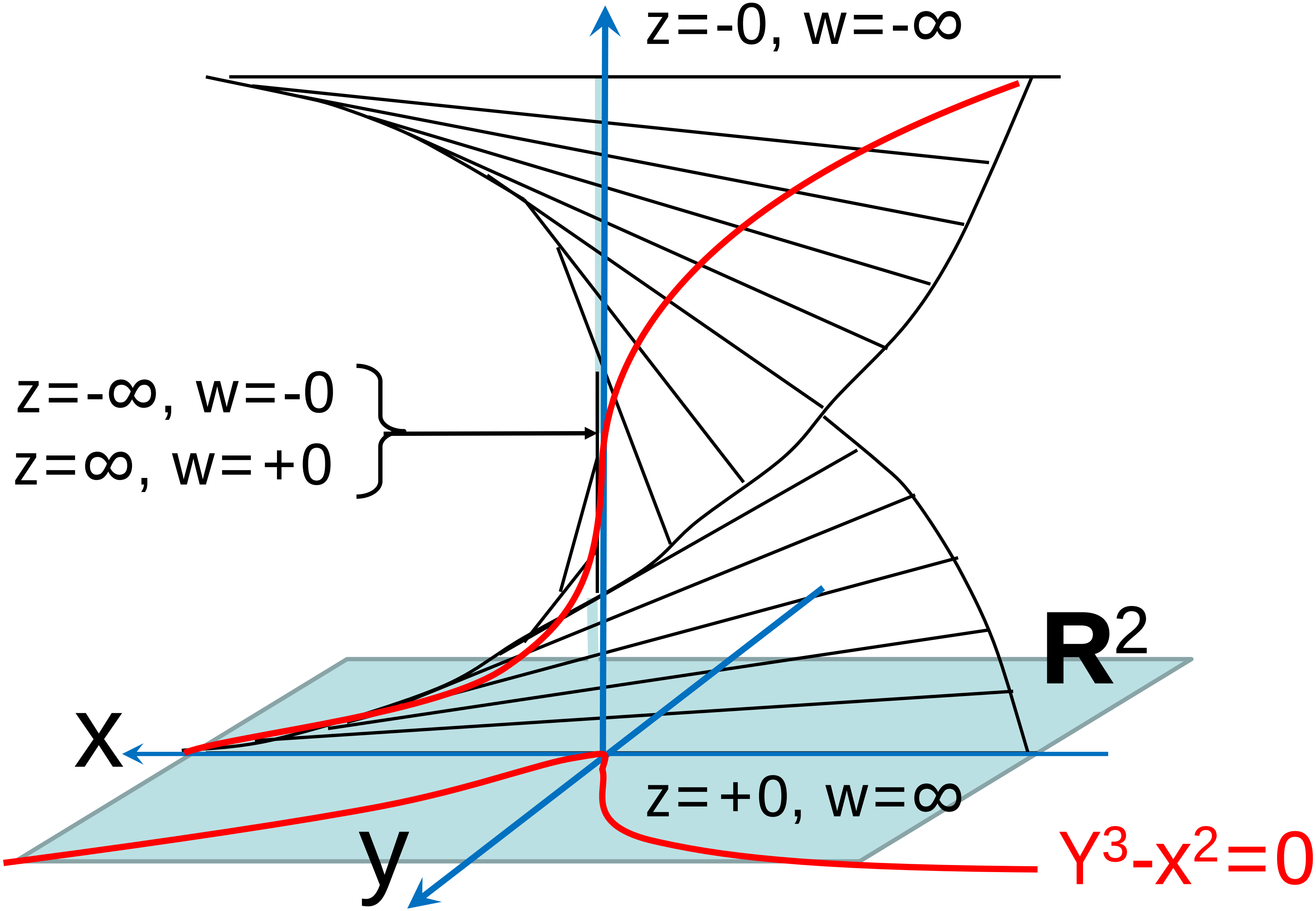
$V=\mathbf{V}(y^3-x^2) \subset \mathbf{R}^2$ の原点 O を中心としたブローアップは

$$B_O(V) \equiv \overline{\{((x,y),(x:y))\ ;\ y^3-x^2=0,(x,y)\neq(0,0)\}}$$

$(x:y)$ は $(1:z)$ と $(w:1)$ で覆える。

$$= \overline{\{(x,y,z)\ ;\ (zx)^3-x^2=0, y=zx, x\neq 0\}}$$
$$\cup \{(x,y,w)\ ;\ y^3-(wy)^2=0, x=wy,\ y\neq 0\}$$
$$= \{((x,y,z)\ ;\ xz^3-1=0, y=zx\}$$
$$\cup \{((x,y,w)\ ;\ y-w^2=0,\ x=wy\ \}$$

V⊂R^2 の原点を中心としたブローアップ



$\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^2$ の原点を中心としたブローアップ

$V = \mathbf{V}(y^3 - x^2) \subset \mathbf{R}^2$

U_1 では $x=x', y=x'z'$, の変数変換で

$y^3 - x^2 = (x'z')^3 - (x')^2 = 0$

$x' \neq 0$ だから $x'z'^3 - 1 = 0$

U_2 では $x=w'y', y=y'$, の変数変換で

$y^3 - x^2 = (y')^3 - (w'y')^2 = 0$

$x' \neq 0$ だから $y' - w'^2 = 0$

特異点がなくなった。

4　まとめ

射影空間とブローアップ

射影空間 $\mathbf{P}^n$ は$(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ 全体の作る空間。

射影空間 $\mathbf{P}^n$ の代数多様体は斉次イデアルで定義される。

ブローアップ＝アフィン空間×射影空間から
中心を取り除いて
持ち上げて　閉包をとる。