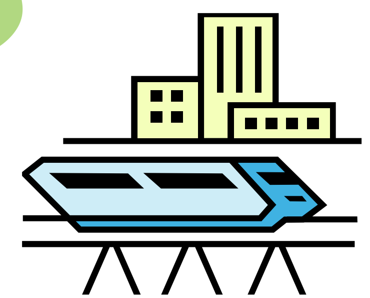
ベイズ統計入門 (15)

まとめ

東京工業大学
渡辺澄夫

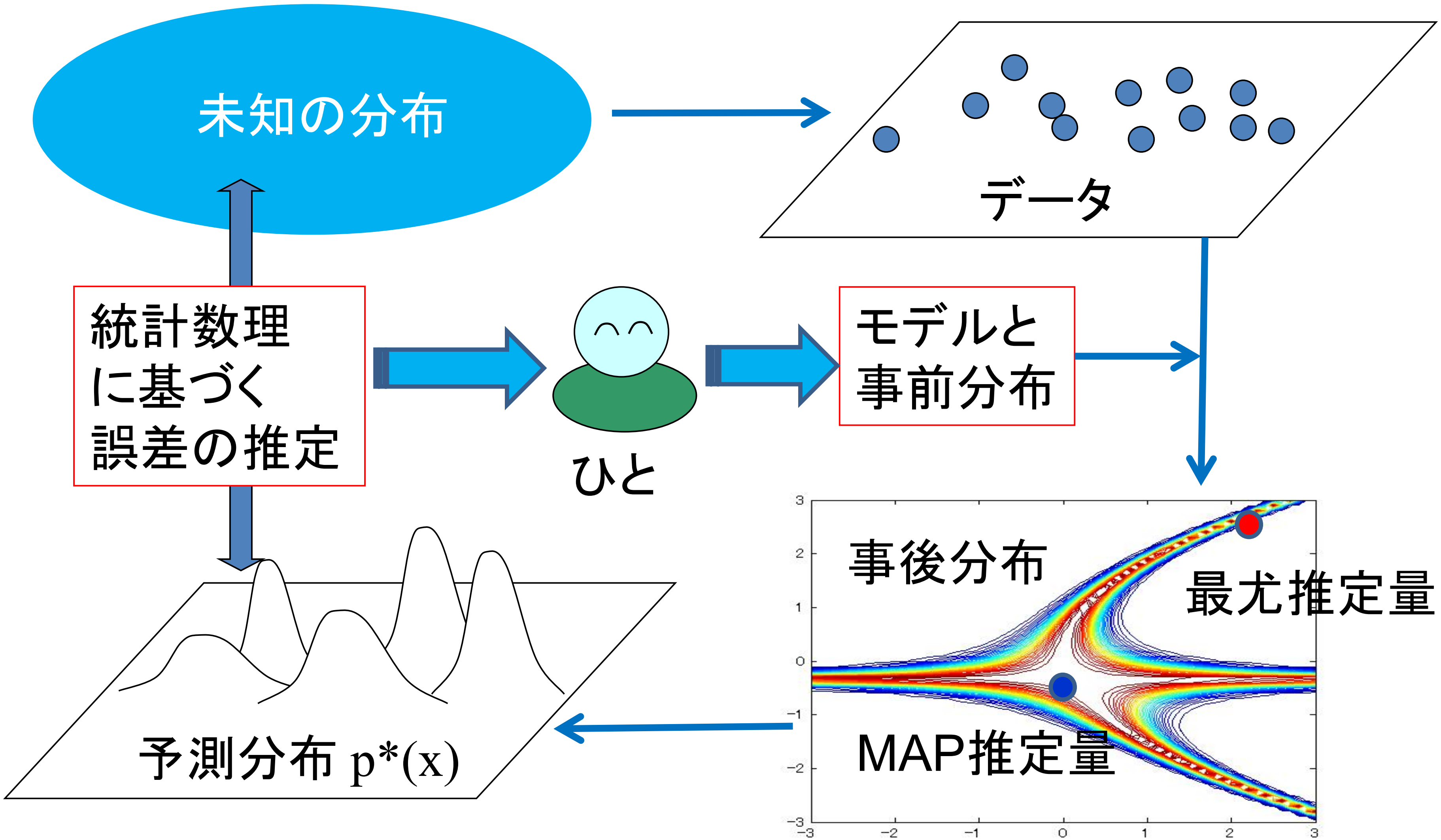
旅の地図

(1) ベイズ統計の定義
(2) 密度と条件つき密度
(3) 混合正規分布＋ギブスサンプラー
(4) 神経回路網＋ランジュバン方程式
(5) 真とモデルの関係
(6) 正則モデルの漸近理論
(7) AIC と BIC
(8) ハイパーパラメータ最適化
(9) 一般モデルの漸近理論
(10) 一般モデルの漸近理論
(11) 一般モデルの選択
(12) 条件つき独立 高次元
(13) 階層ベイズ
(14) 相転移
(15) まとめ



ベイズ統計学　まとめ

統計数理とモデリング



未知の分布
データ
統計数理
に基づく
誤差の推定
ひと
モデルと
事前分布
事後分布
最尤推定量
MAP推定量
予測分布 p*(x)

自由エネルギー

$$F_n = -\log \int \varphi(w) \prod_{i=1}^{n} p(X_i|w)\, dw.$$

$$K(q(X^n)||Z(X^n))$$

汎化損失

$$G_n = - \int q(x) \log p(x|X^n)\, dx$$

$$K(q(x)||p(x|X^n))$$

自由エネルギーの漸近挙動（正則な場合）

$$F_n = nL_n + (d/2) \log n + (1/2) \log \det J_n$$
$$- (d/2) \log(2\pi) - \|\xi_n\|^2/2 - \log \varphi(w_0) + o_p(1)$$

自由エネルギーの漸近挙動（一般の場合）

$$F_n = n L_n + \lambda \log n - (m-1) \log\log n + O_p(1).$$

汎化損失の漸近挙動（正則な場合）

$$G_n = L_0 + (1/2n)\{ d + ||\xi_n||^2 - tr(IJ^{-1}) \} + o_p(1/n)$$

$$T_n = L_n + (1/2n)\{ d - ||\xi_n||^2 - tr(IJ^{-1}) \} + o_p(1/n)$$

$$C_n = L_n + (1/2n)\{ d - ||\xi_n||^2 + tr(IJ^{-1}) \} + o_p(1/n)$$

$$W_n = L_n + (1/2n)\{ d - ||\xi_n||^2 + tr(IJ^{-1}) \} + o_p(1/n)$$

$$\mathbf{E}[G_n] = L_0 + (d/2n) + o(1/n)$$

$$\mathbf{E}[T_n] = L_0 + \{ d - 2\, tr(IJ^{-1}) \} /2n + o(1/n)$$

$$\mathbf{E}[C_n] = L_0 + (d/2n) + o(1/n)$$

$$\mathbf{E}[W_n] = L_0 + (d/2n) + o(1/n)$$

汎化誤差の漸近挙動(一般の場合）

$$G_n = L_0 + (1/2n) \{ 2\lambda + \langle t^{1/2}\xi_n(u)\rangle - \mathrm{Fluc}(\xi_n) \} + o_p(1/n),$$
$$T_n = L_n + (1/2n) \{ 2\lambda - \langle t^{1/2}\xi_n(u)\rangle - \mathrm{Fluc}(\xi_n) \} + o_p(1/n),$$
$$C_n = L_n + (1/2n) \{ 2\lambda - \langle t^{1/2}\xi_n(u)\rangle + \mathrm{Fluc}(\xi_n) \} + o_p(1/n),$$
$$W_n = L_n + (1/2n) \{ 2\lambda - \langle t^{1/2}\xi_n(u)\rangle + \mathrm{Fluc}(\xi_n) \} + o_p(1/n).$$

$$E[G_n] = L_0 + \lambda / n + o(1/n),$$
$$E[T_n] = L_0 + (\lambda-2\nu) / n + o(1/n),$$
$$E[C_n] = L_0 + \lambda / n + o(1/n),$$
$$E[W_n] = L_0 + \lambda / n + o(1/n),$$

まとめ

（真の分布・統計モデル・事前分布）の三組が与えられると、「データから
真の分布を推測する」という確率的現象が定義される。

統計的推測の主な目標は、推測されたものが真の分布とできるだけ
似ているようにすることである。

汎化損失と自由エネルギーが、推測の誤差を測るための指標である。

汎化損失と自由エネルギーは確率変数であり、数学的法則にしたがい、
ベイズ推測においては、その数学的法則を明瞭に取り出すことができる。

現実の世界では真の分布はわからないが、数学的法則を駆使することで
推測の適切さを確認しよう。