交換可能な分布とは

渡辺澄夫

このファイルの概要

確率変数が**交換可能**であることの定義を述べ例を紹介します。

交換可能な例として「ポリアの壺」と「確率が未知のコイン投げ」は、見かけの上では異なる現象ですが、確率論的に等価であることを説明します。異なる「解釈」を持つ現象が実は等価であることを理解しましょう。

最後に、交換可能な確率変数における表現定理を述べます。

１　交換可能な分布の定義

独立

n 個の確率変数の組 $(X_1,\ldots,X_n)$ を X^n と表記する。

X^n が独立であるとは、その確率密度関数が次を満たすこと。

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \pi_{i=1}^{n} p(x_i)$$

交換可能

X^n が交換可能であるとは

任意の $1 \leqq j \leqq n$ と任意の置換 σ（対称群Gの元）について

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_j) = p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(j)})$$

※　独立であれば交換可能であるが、逆は一般には不成立。

交換可能な例（スピンシステム）

$X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ で各 X_i は $\{-1, 1\}$ に値をとる確率変数

$$X^n \propto \exp\left(\Sigma_{i,j=1}^{n} X_i X_j \right)$$

このとき X^n は交換可能である。

(注) この例は、全結合を持つスピンシステムです。各 $\{X_i\}$ は独立ではありません。
ある X_i は他のものが1であるほど1になりやすく、他のものが(-1)である
ほど(-1)になりやすいという性質があります。

交換可能な例（続き）

$p(x|a) = \exp(2ax)/z(a)$ ただし $z(a)=\exp(2a)+\exp(-2a)$

とおくと

$$\exp\left(\Sigma_{i,j=1}^{n} X_i X_j\right) = 1/\pi^{1/2} \int \exp\left(- a^2 + 2a \Sigma_{i=1}^{n} X_i \right) da$$

$$= 1/\pi^{1/2} \int \exp(- a^2)\, z(a)^n\, \Pi_{i=1}^{n}\, p(X_i|a)\, da$$

つまり、X^n の分布は独立な確率変数の a による積分で

表すことができます。

対称化

どんな確率変数 X^n に対しても、その順番に意味がないと考えて対称化を行ったもの

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 1/|G| \sum_{\sigma\in G} p(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

は交換可能である（Gは対称群）。

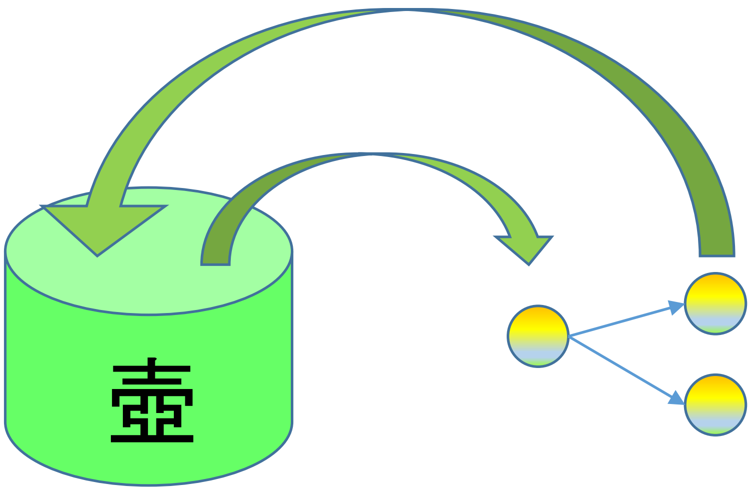
２　ポリアの壺

ポリアの壺

白玉と赤玉が a, b 個ずつ入っている壺がある(a,b>0)。

ランダムにひとつ取り出したら、その玉および同じ色の玉の

合わせて2個を壺に入れる。これを繰り返す。



白a個，　赤b 個

ポリアの壺の解釈

『解釈』 白玉が出る確率は、あらかじめ決まっているのではなく、
偶然に何色の玉が出たかによって 徐々に決まっていく。

ポリアの壺(2)

第 i 回めに取り出した玉が白のとき X_i =1 そうでないとき X_i=0 とする。

このとき

$$p(X_1=1) = a/(a+b) \qquad (1)$$

$$p(X_{n+1}=1|X^n) = (\Sigma_{j=1}^{n} X_j +a) / (a+b+n) \qquad (2)$$

である。

※　X^n (n=1,2,3,…) の分布は(1)(2)の条件でユニークに定まる。

ポリアの壺(3)

このとき $X^n=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ は独立ではない。

白玉が出る確率 $(\Sigma_{j=1}^{n} X_j +a) / (a+b+n)$ は、白玉が出れば出るほど白玉が出やすくなり、赤玉が出れば出るほど赤玉が出やすくなる。

ポリアの壺の実験例

ポリアの壺の実験。かんたんにできるので、やってみてください。

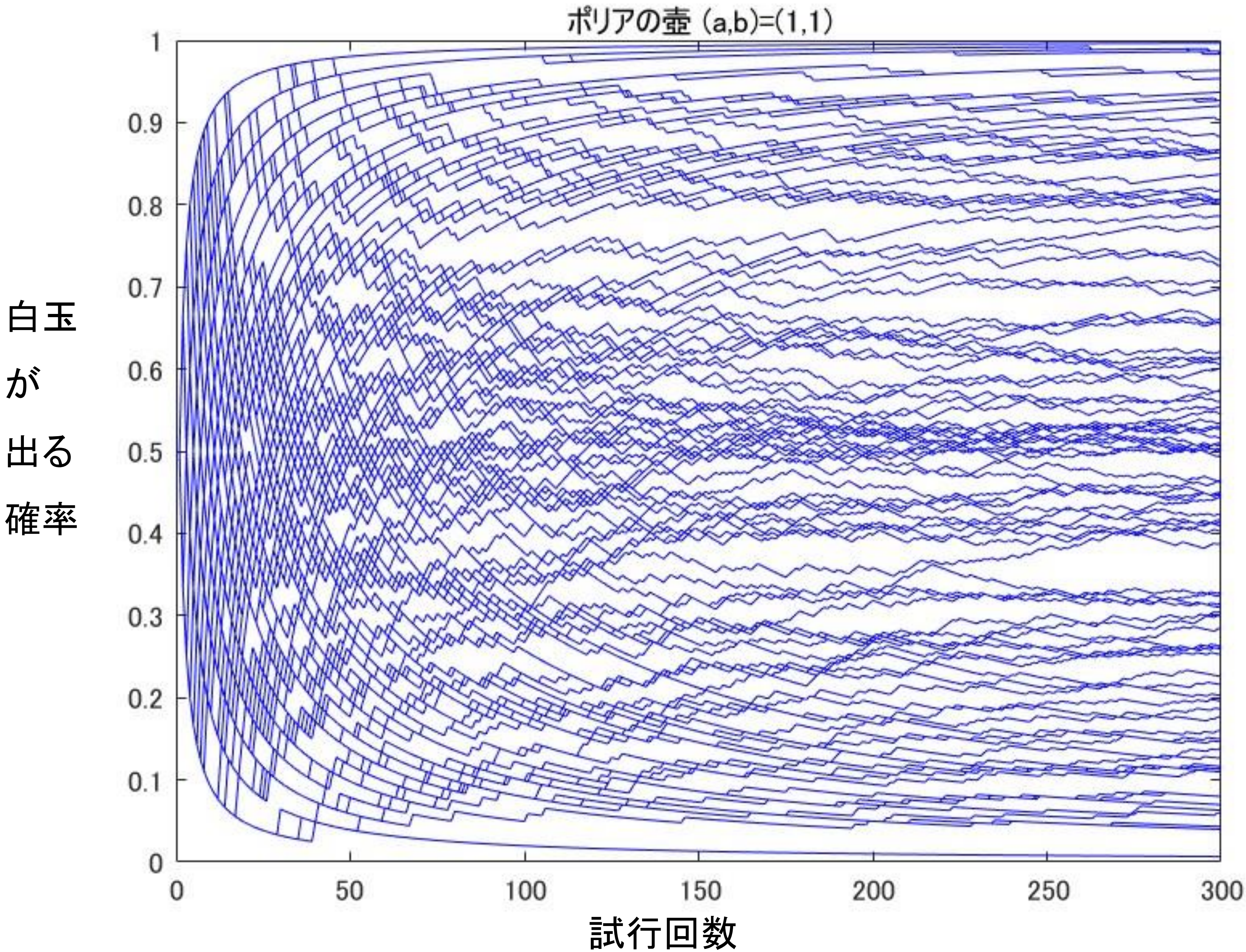
横軸：試行回数

縦軸：白玉が出る確率 $p(X_{n+1}=1|X^n)$ の推移

同じ初期状態から「 i=1,2,…,300 」を独立に百回やってみた。

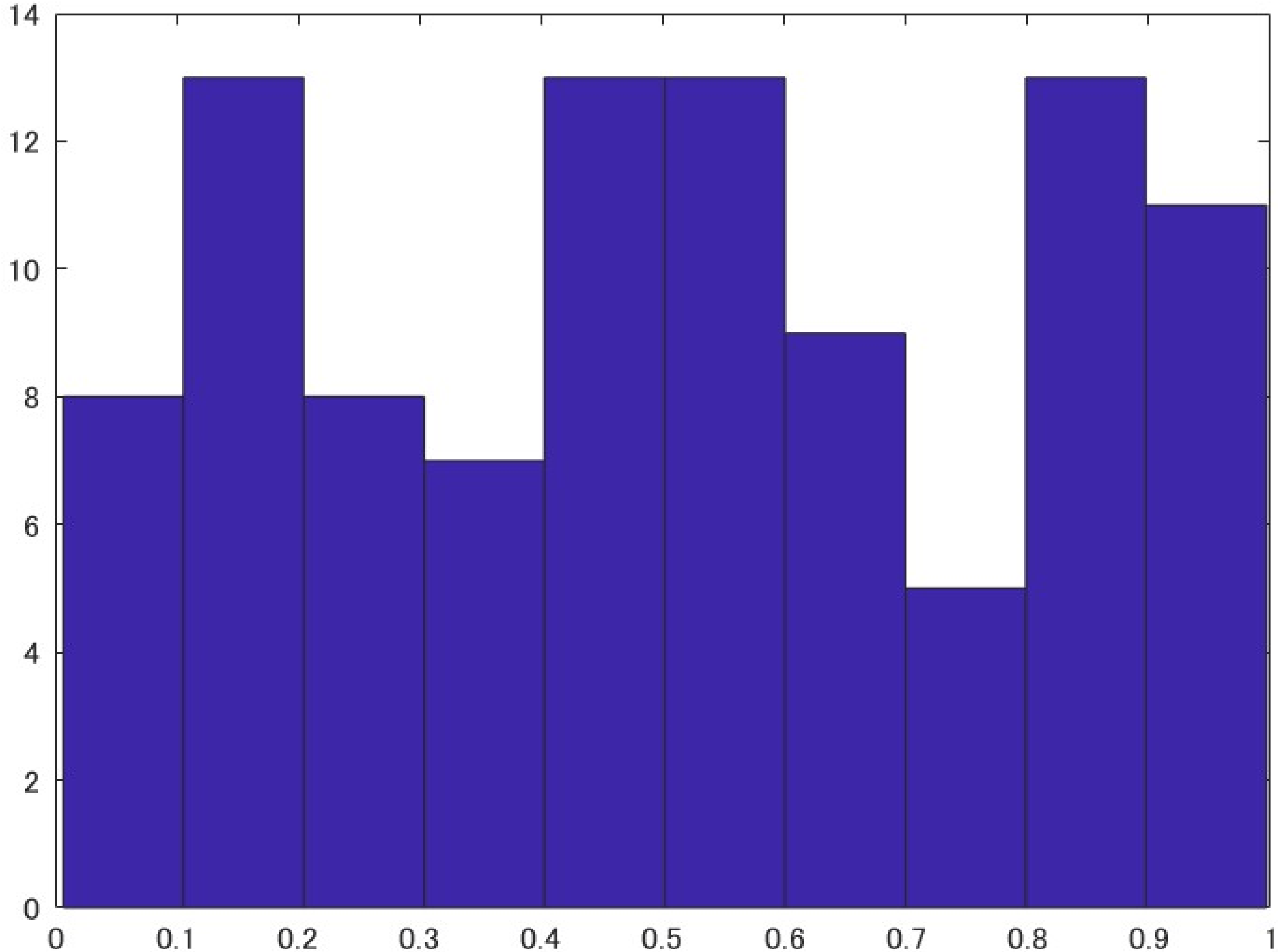
白玉がでる確率は $n\to\infty$ で収束しますが、収束先は運しだいです。

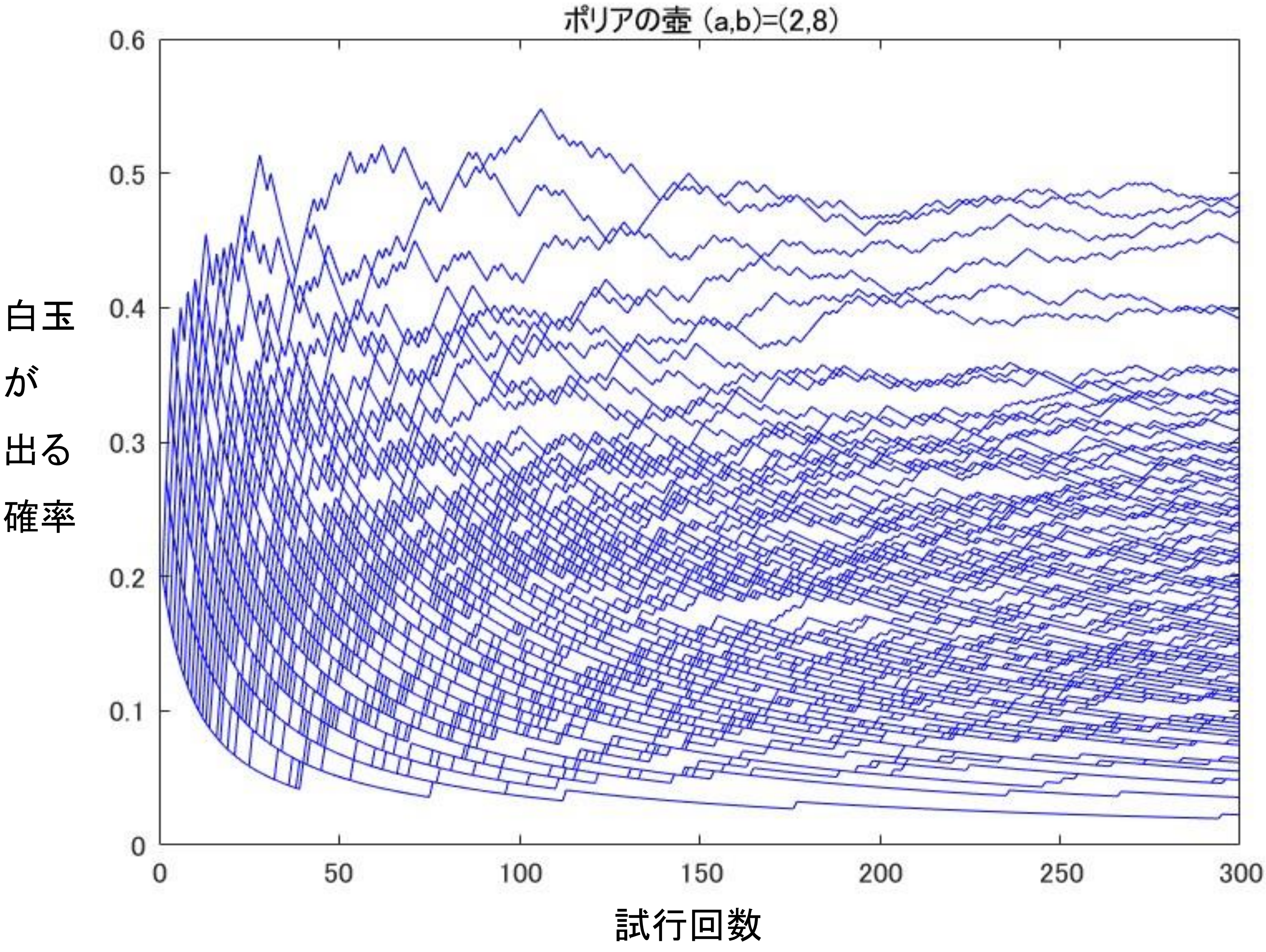
最初に壺に入っていた玉の数(a,b)が異なれば、異なる分布になります。



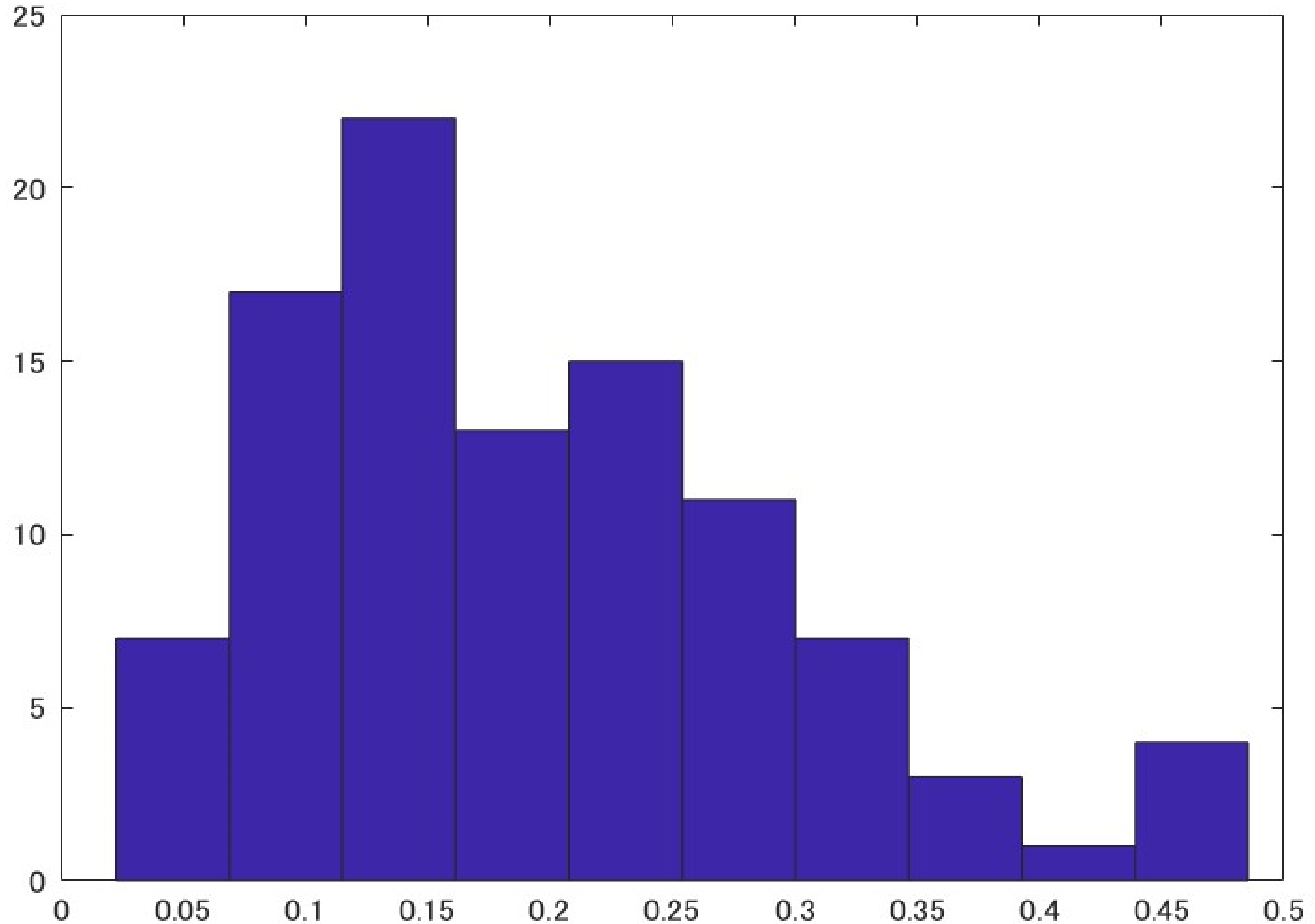
ポリアの壺 (a,b)=(1,1)
白玉が出る確率
試行回数
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
50
100
150
200
250
300

白玉が出る確率の収束先




ポリアの壺 (a,b)=(2,8)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
50
100
150
200
250
300
白玉が出る確率
試行回数

白玉が出る確率の収束先

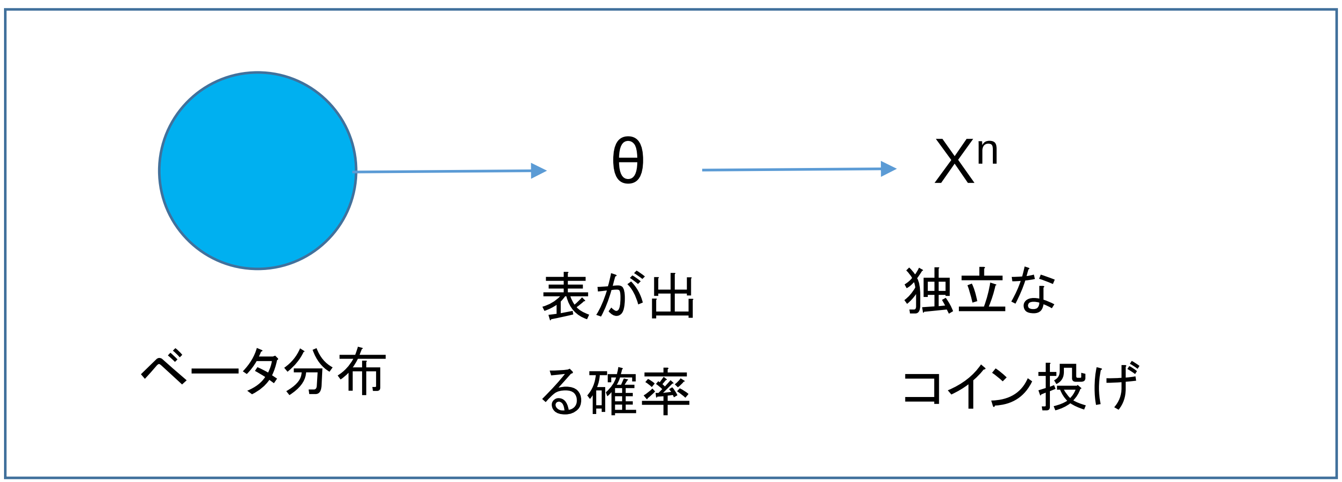


３　確率が未知のコイン投げ

確率が未知のコイン投げ(1)

ベータ分布に従ってパラメータθが決まり、その後

「表が出る確率がθのコイン」を独立に n 回ふる。



確率が未知のコイン投げ

定数 a,b >0を固定する。確率変数 θ と X^n が下記に従うものとする。

$\theta \sim \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} / B(a,b)$ （ベータ分布） (3)

$X^n \sim \prod_{i=1}^{n} \theta^{X_i} (1-\theta)^{1-X_i}$ （独立な2項分布） (4)

確率が未知なコイン投げ(2)

(あ) 各θはランダムに定まり固定される。

(い) その後 $X^n=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ は独立である。

コインが表になる確率は最初からθであり、変化しない。

『解釈』　コインが表になる確率は、あらかじめランダムに決定され、その後は（試行結果に依存せず）変わらない。

復習　ベータ分布の定義

定数 a,b >0を固定する。確率変数 $0<\theta<1$ が下記に従うものとする。

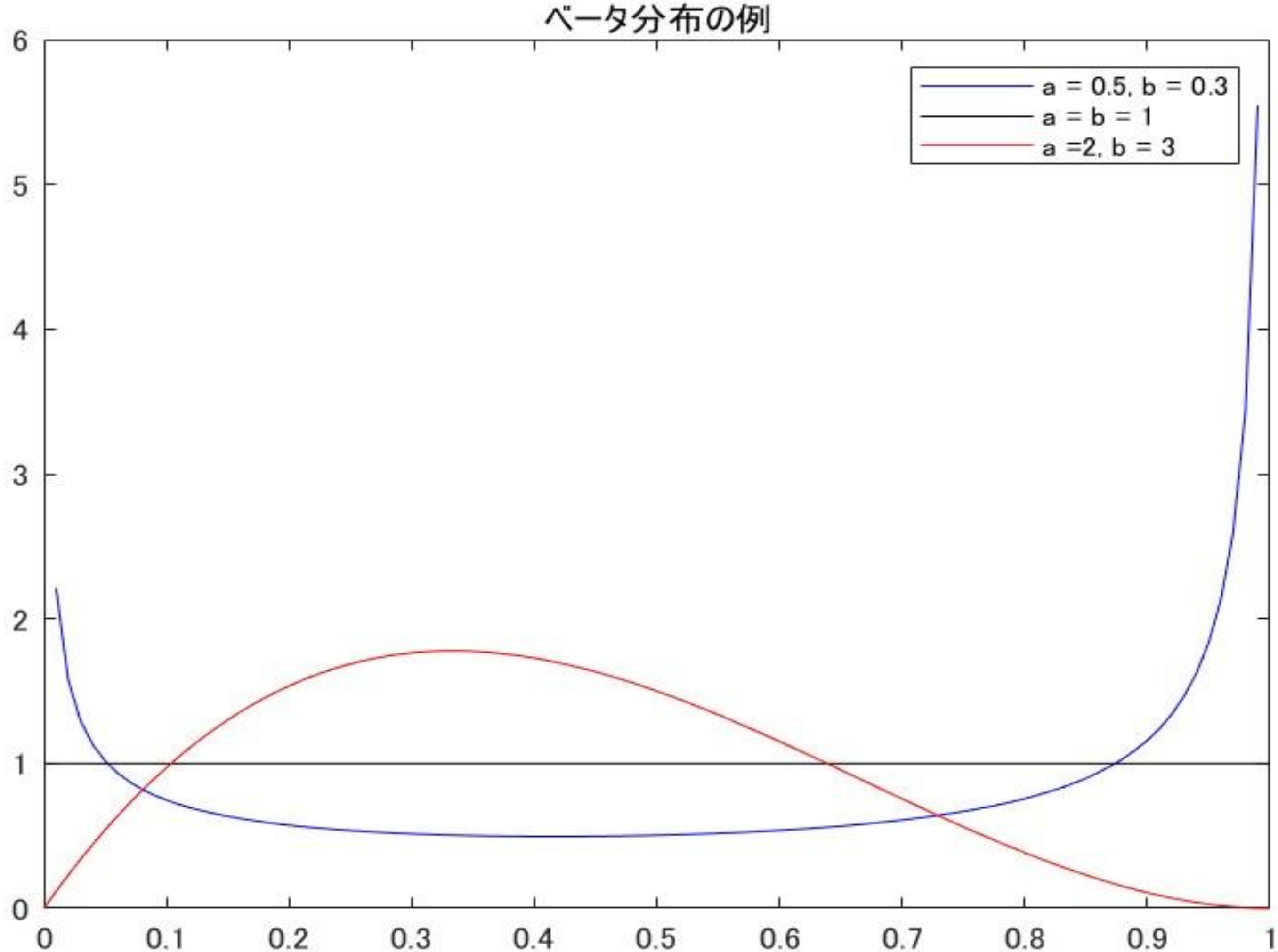
$$\pi(\theta|a,b) = \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} / B(a,b)$$　（ベータ分布）

ここで　$B(a,b) = \int_0^1 \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta$ はベータ関数。

性質　(1)　$B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/ \Gamma(a+b)$

(2)　$B(a+1,b) = a/(a+b)$,　　$B(a,b+1)=b/(a+b)$.

復習　ベータ分布の例



確率が未知のコイン投げ(3)

n 回投げたときの表の総数を S_n とすると X^n の同時確率分布は

$$p(X^n) = \int \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} / B(a,b) \times \prod_{i=1}^{n} \theta^{X_i} (1-\theta)^{1-X_i} \, d\theta$$

$$= B(a + S_n, b + n - S_n) / B(a,b)$$

従って、確率が未知のコイン投げは交換可能である。また条件つき確率は

$$p(X_{n+1}|X^n) = p(X^{n+1}) / p(X^n)$$

$$= \frac{B(a+X_{n+1}+S_n, b + n - S_n - X_{n+1})}{B(a+S_n, b + n - S_n)}$$

ポリアの壺＝確率が未知のコイン投げ

前ページより　$p(X_1=1) = a / (a+b)$

$$p(X_{n+1}=1|X^n) = (\Sigma_{j=1}^{n} X_j + a) / (a+b+n)$$

この式は、ポリアの壺(1)(2)と同じである。

つまり確率が未知のコイン投げ(3)(4)は、ポリアの壺と等価である。

確率が未知のコイン投げ = ポリアの壺

ポリアの壺 は交換可能

確率が未知のコイン投げは交換可能である。

従って、これと等価なポリアの壺も交換可能である。

確率が未知のコイン投げでは大数の法則

$$(\Sigma_{j=1}^{n} X_j + a) / (a+b+n) \ \rightarrow \ \theta$$

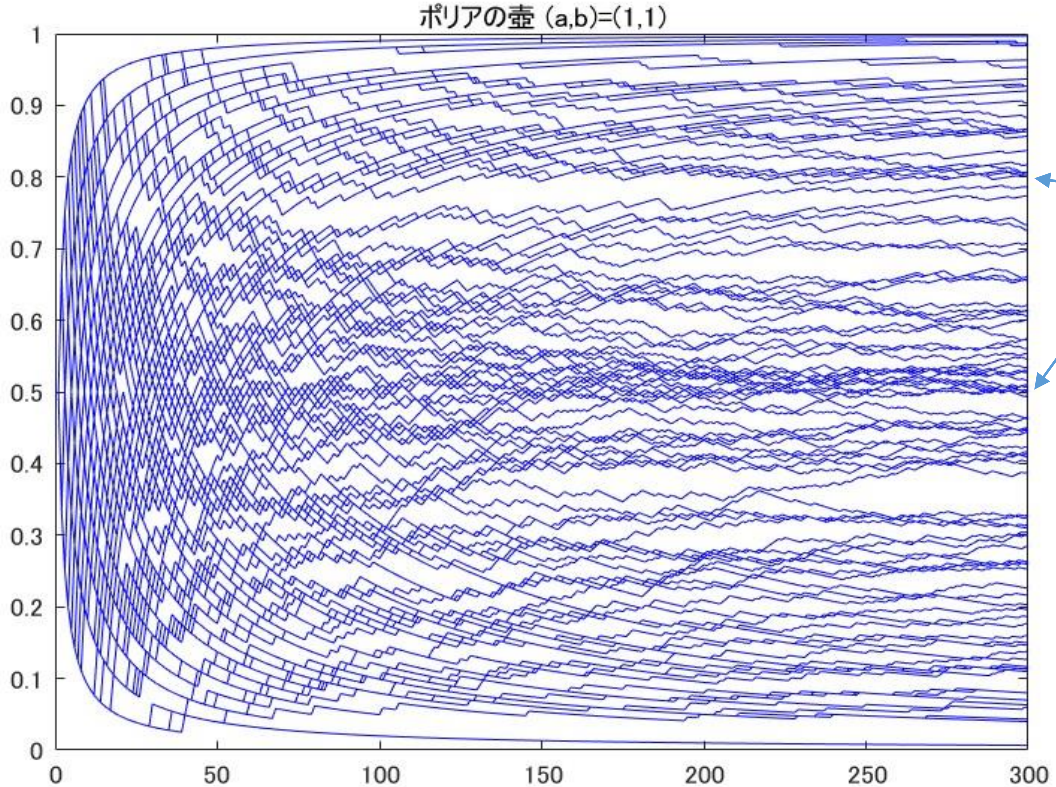
が成り立つ。従って、ポリアの壺でも、これは成り立つ。すなわち

ポリアの壺の白玉が出る確率は、ベータ分布に従う確率変数に

収束する(収束先は定数ではなくて確率変数)。

(注) 交換可能な確率変数についても大数の法則や中心極限定理があります。

ポリアの壺の収束先は最初から決められていた　？



ポリアの壺で白玉が
出る確率θの収束先は
最後までわからないが

最初からランダムに
決められていて
そこに収束したと
考えることもできる。

θ は最初から
決まっていた

⟺

θ は無限の
彼方で現れる

『解釈』とは

(A) ポリアの壷では、白玉が出る確率は、あらかじめ定められているのではなく、偶然の結果により徐々に決まっていくと『解釈』された。

(B) 確率が未知のコイン投げでは、コインが表になる確率は、あらかじめ偶然で定められて、その後は固定されていると『解釈』された。

しかし、この二つは確率論的に等価である。確率変数列 X^n あるいは観測された列 (1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0, …) からも区別はできない。

『物理現象』は異なるような気がする･･･

ポリアの壺も、確率が未知のコイン投げも、どちらも、「物理的に」
実験してみることはできる。（古典物理学の範囲で）。

ポリアの壺では、収束確率θに対応するものは、物理的に実在していないような気がする。(無限試行の極限として現れるように感じる）。

確率が未知のコイン投げでは、確率θのコインが実在しているような
気がする。（固定された確率が存在するように感じる）。

4　表現定理

確率モデルと事前分布

$p(x|w)$ を確率モデル, $\varphi(w)$ を事前分布とする。

確率変数 (w,X^n) が次式に従う状況を考える。

$$w \sim \varphi(w)$$
$$X^n \sim \prod_{i=1}^{n} p(X_i|w)$$

もしも X^n がこの式に従うならば密度関数は

$$p(X^n) = \int \varphi(w) \prod_i p(X_i|w)\, dw$$

であり、X^n は交換可能である。

表現定理

ハウスドルフかつ局所コンパクトな集合（$\mathbf{R}^N$ならOK)に値をとる確率変数 X^n が交換可能であるならば(n=1,2,3,…,無限個) , 確率分布の集合上のある確率分布 Q(q) が存在して

$$q \sim Q(q)$$

$$X^n \sim \Pi_i \, q(X_i)$$

が成り立つ（de Finetti-Hewitt-Savage の表現定理)。すなわち

$$(X^n) \text{ の分布} = \int \Pi_i \, q(X_i) \, Q(dq)$$

参考　推測の評価

現実の問題では分析者が設定したモデルや事前分布は、データ生成分布とは一致していないので評価を行う必要があります。

自由エネルギー（マイナス対数周辺尤度）、クロスバリデーション、情報量規準を適用することができますが、それらを用いても「ポリアの壺」と「確率が未知のコイン投げ」を区別することはできません。

まとめ

交換可能の概念を説明した。

X^n (n=1,2,3,…)が交換可能のとき、どちらも成り立つ。

(A) X_{n+1} の確率分布はあらかじめ決まっていない。

確率 $p(X_{n+1} | X^n)$ は、偶然の結果、徐々に決まっていく。

（B) 未知の Q に従って q(x) があらかじめ決定され、その後に

X^n は独立に q(x) から生成される。

まとめ

交換可能な確率変数について

「確率は徐々に決まっていく」という解釈と

「確率はあらかじめランダムに定められていて変わらない」

という解釈のどちらが正しいかを考察することには

確率論的な意味はありません。

確率的な現象を考えるとき 『解釈』に基づく理解は

混乱のもとになることに注意しましょう。