佐藤担著　共立出版

初めての確率論測度から確率へ

2章（8）確率分布　セミナー資料

PDF作成者　渡辺澄夫

前回の宿題

定義。確率測度 Q が P に対して絶対連続であるとは
任意の $N \in \mathscr{B}$ に対して $P(N)=0$ ならば $Q(N)=0$。

定義。確率測度 Q が P に対して特異であるとは
ある $N \in \mathscr{B}$ が存在して $P(N)=Q(N^c)=0$。

定理。$(\Omega,\mathscr{B},P)$ を確率空間とする。任意の確率測度 Q は
$Q = Q_1+Q_2$ と一意に分解できる。ここで
Q_1 は P に対して絶対連続
Q_2 は P に対して特異

◎　この定理もラドン・ニコディムの定理という。
◎　Q_1 は絶対連続だからラドン・ニコディム微分を持つ。

第2章

これからのち本書の残りの部分では特に断らない限り「確率変数」は、ほとんど確実に実数の値をとるもののみを取り扱う。

すなわち確率空間$(\Omega,\mathscr{B},P)$上の確率変数Xで $P(X\in\mathbf{R})=1$ を満たすものだけを考える。

例。$([0,1],\mathscr{B},$一様分布$)$上の確率変数 $X(\omega)=1/\omega$ は条件を満たすが $X(\omega)=\sup_n (n\omega)$ は条件を満たさない。

第２章では確率変数の確率分布を導入し、コルモゴロフの３級数定理、その応用として確率変数列の無限和と無限積の概収束の同等性、大数の強法則を証明する。

定義の復習

距離空間（集合、距離）が与えられたとき、その開集合全体を含む最小のσ集合体（完全加法族）を**ボレル集合体**という。その元を**ボレル集合**という。

注意。距離空間として特に $\mathbf{R}^d$ とユークリッド距離を考えている場合もある。このときのボレル集合体のこともボレル集合体といい B_d と書く。可測空間$(\mathbf{R}^d, B_d)$上に定義された確率測度を**ボレル確率測度**という。（完備化はされていないことに注意）。

可測空間$(\mathbf{R}^d, B_d)$から実数への可測関数のことを**ボレル関数**という。

注意。実数上の積分 $\int f(x)dx$ はルベーグ測度による積分を表している（つまり完備化された測度による積分）。

第2章　　８. 確率分布

確率変数の確率分布

８．１に離散的な場合の導入が示されているが、離散的な場合は注意しなくてはならいないことは特にないので省略する。

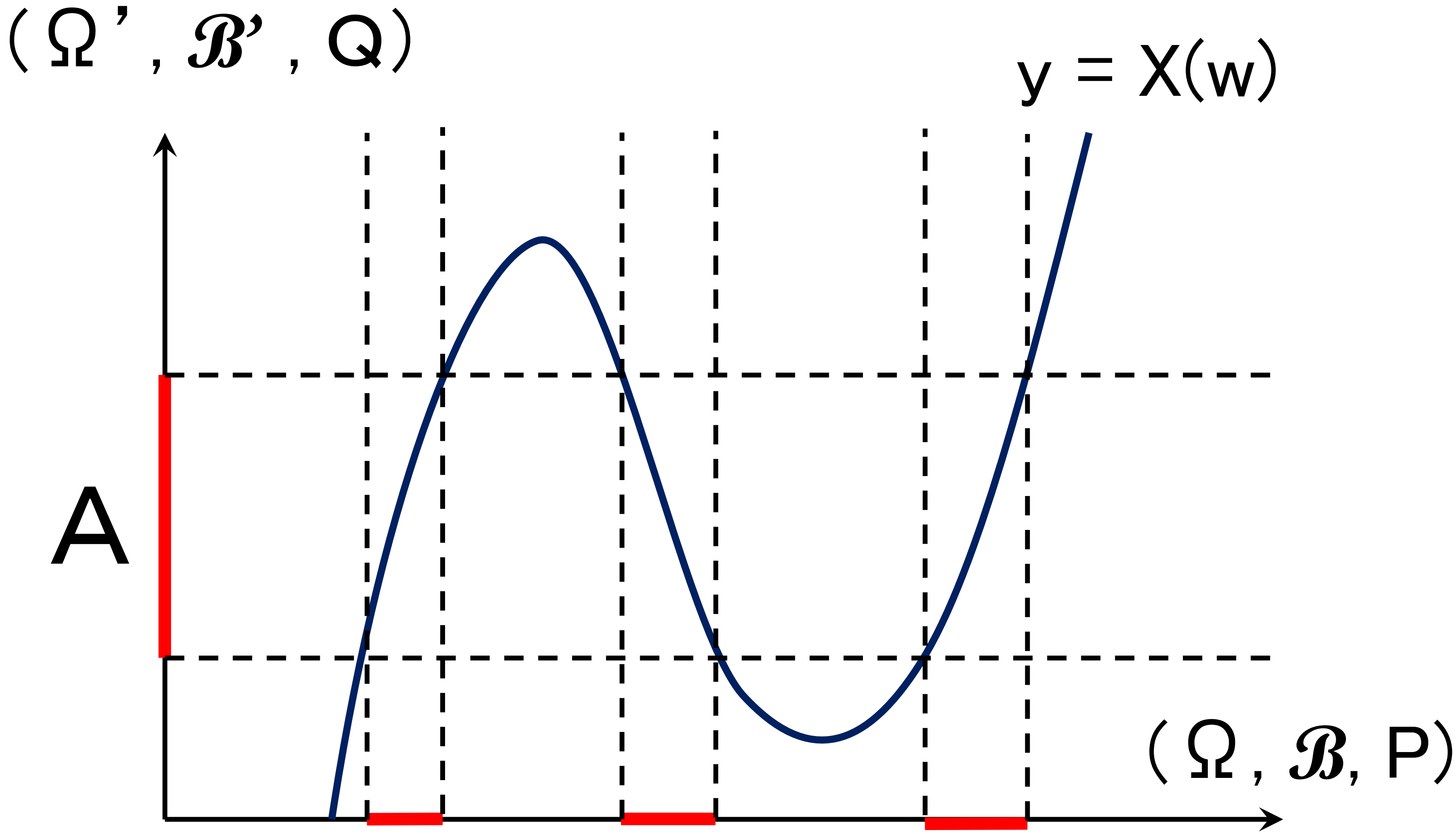
確率空間（$\Omega,\mathscr{B},P$) から ($\mathbf{R}^1$, B_1)への確率変数 X が与えられたとき($\mathbf{R}^1$, B_1)上の確率測度 μ_X を

$$\forall A\in B_1 \text{ について}$$
$$\mu_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega;X(\omega)\in A\})$$

と定義し、これをXの分布という。

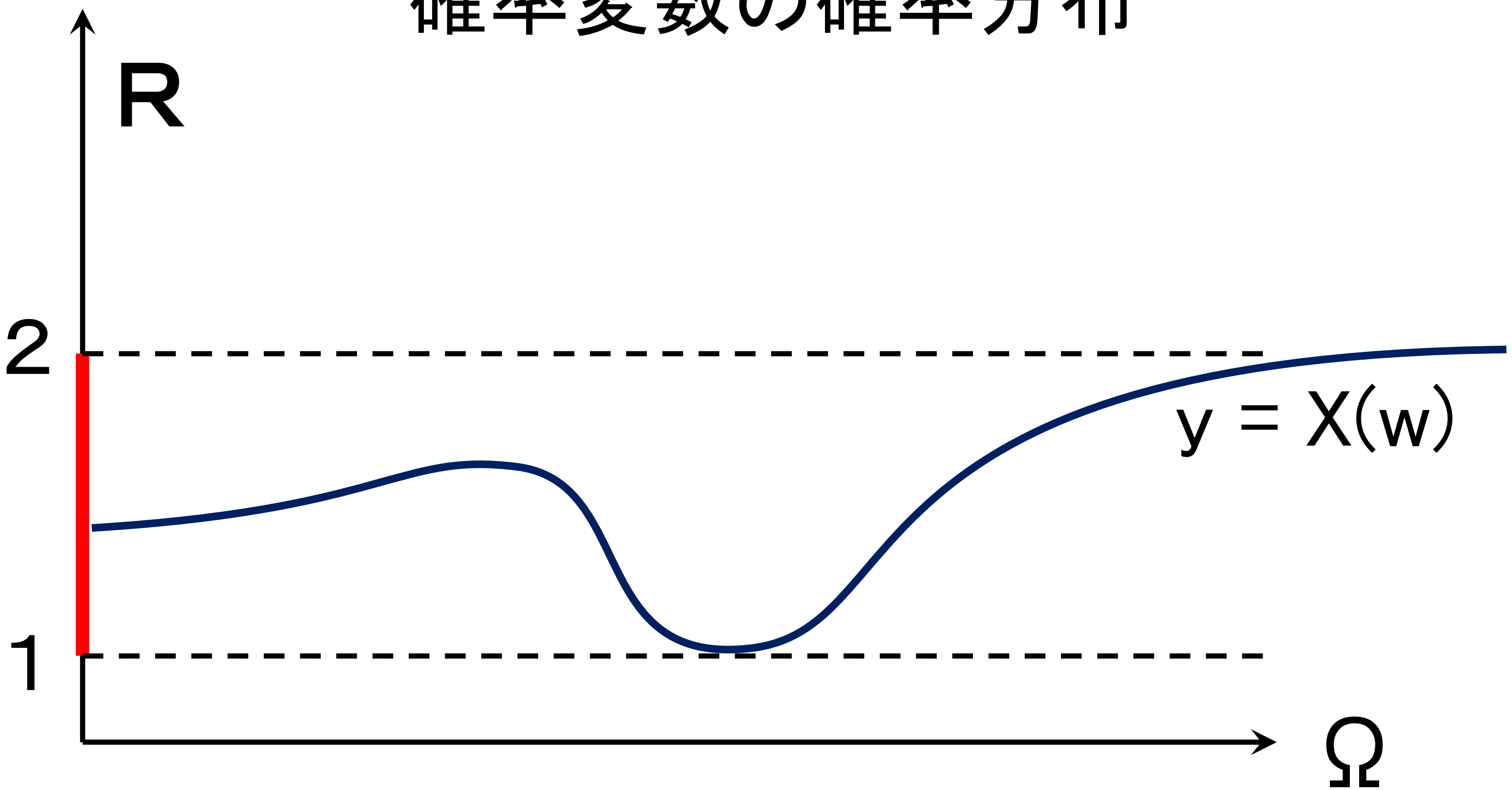
◎ 上記の μ_X は確かに確率測度である。

確率変数の確率分布



$$X^{-1}(A) = \{\omega; X(\omega) \in A\}$$

確率変数の確率分布



$X^{-1}(R) = \Omega$

$X^{-1}(\phi) = \phi$

（注意）この例では
$X^{-1}([1,2)) = \Omega$
$X^{-1}([3,4]) = \phi$

μ_X が確率測度であることの確認

μ_X をμと書く。定義より $\mu(A) = P(\{\omega; X(\omega) \in A\})$

(1) μ(空集合)=P(空集合）=0,
(2) $\mu(\mathbf{R}) = P(\Omega) = 1$,
(3) $\{A_k\}$ を加算個の共通なし集合とする。

$$\mu(\cup A_k) = P(\{\omega;\ \omega \in \cup A_k\})$$
$$= P(\cup_k \{\omega; X(\omega) \in A_k\})$$
$$= \Sigma_k\ P(\{\omega; X(\omega) \in A_k\}) = \Sigma_k\ \mu(A_k)$$

以上で確認できた。（証明終）。

R 上の具体的な分布

例8.1 ポアソン分布

$$P(X \leqq n) = \sum_{k \leqq n} \lambda^k \exp(-\lambda) / k!$$

例8.2 正規(ガウス)分布

$$P(X \leqq a) = \int_{-\infty}^{a} 1/(2\pi)^{1/2} \exp(-x^2/2)\, dx$$

平均値と分布

補題8.1 X を確率変数 、μ をその分布、$\phi(x)$ を非負値ボレル関数とする。このとき

$$E[\phi(x)] = \int \phi(x)\, d\mu(x)$$ （+∞となる場合も含む）

（証明）確率分布 μ の定義から $\phi(x)$ が単関数であるときにこの式が成り立つのは明らかである。定理4．３から任意の非負値ボレル関数 $\phi(x)$ は、単関数の列 $\{\phi_n(x)\}$ によって単調に下から近似でき

$$E[\phi_n(x)] = \int \phi_n(x)\, d\mu(x)$$

がなりたつ。これは単調非減少数列だから収束するか∞に発散するかいずれかである。平均値の定義（P．５４）からこの数列の極限が平均値であるから補題8.1が得られた。（証明終）

平均値と分散

定理8.1 X を確率変数 、μ をその分布、$\phi(x)$ を非負値とは限らないボレル関数とする。このとき

$$E[\phi(x)] = \int \phi(x)\, d\mu(x)$$

（一方が有限確定なら他方も存在して等しい）

（証明）$\phi(x)$ を非負の関数の差で表して $\phi(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$ してそれぞれに補題8.1 を適用すればよい。（証明終）

補題8.2 $E[X^2]<\infty$ とする。このとき $V=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-E[X^2]$ は有限確定値である。これを分散という。

（証明）ヘルダーの不等式から $E[|X|] \leqq E[1]^{1/2}E[|X|^2]^{1/2}$ 。従って $E[X]^2 \leqq E[X^2]$ であるから平均が存在する。等式は計算してみればよい。（証明終）

例題8.3 8.4は省略。

分布が同じための必要十分条件

補題8.3 二つの異なる確率空間から実数への関数として定義された二つの確率変数X_1と X_2があるとする。二つの確率変数の分布が同じであるということと、実数上の任意のボレル関数ϕについて$E_1[\phi(X_1)]=E_2[\phi(X_2)]$ が成り立つこととは同値である。

（証明）（→）定理8.1 より明らか。（←）ボレル関数として任意のボレル集合の上でだけ1になる関数を取ってくればよい。（証明終）

二つの分布が同じであるための必要十分条件にはいろいろなものがある。
たとえば、特性関数が同じなら分布は同じであるということを後の章で証明すると思う。

確率分布の表現定理

補題8.3 実数上の確率分布が任意に与えられたとする。ある確率空間とその確率空間上に定義された確率変数が存在して、与えられた確率分布を分布とするものが存在する。

（証明）任意の確率分布μに対して確率空間を(R, B_1, μ)として確率変数を$X(w)=w$とすればよい。（証明終）

（注意）確率空間が与えられたとき、確率変数に対して確率分布は一意に定まる。しかしまったく別の確率変数が同じ確率分布を持つことは珍しいことではない。

第3章　　　１２．特性関数

セミナーの回数のため１２節13節を行うことができないので
結果のみ紹介します。

特性関数の定義

μ を R 上のボレル確率測度とするとき t∈R について

$$\underline{\mu}(t) = \int \exp(itx)\, d\mu(x)$$

を μ の特性関数という。|exp(itx)|=1だから、この積分は常に有限確定値である。確率空間(Ω,B,P) から実数への確率変数 X の分布を μ とするとき、これをXの特性関数とも呼ぶ。平均を使って表せば

$$\underline{\mu}(t) = E[\ \exp(itX)\ ]$$

である。D 次元の場合には t, X をそれぞれ d次元とするとき tx の代わりに t・X で定義する。

特性関数の性質(一般次元で成り立つがd=1で述べる)

定理 12.1 $\underline{\mu}(t)$ をボレル確率測度μの特性関数とする。
(1) $\underline{\mu}(t)$は **R** 上連続.
(2) 任意の $t_1,t_2,\cdots,t_n\in$**R** と任意の $z_1,z_2,\cdots,z_n\in$**C** について

$$\Sigma_{k,l}\, \underline{\mu}(t_k-t_l)\, z_k(z_l)^* \geqq 0.$$

(3) $\underline{\mu}(0)=1.$

次式が成り立つことに注意

$$|\exp(itx)|=1$$

$$\Sigma_{k,l}\, \underline{\mu}(t_k-t_l)\, z_k(z_l)^* = \int |\Sigma_k \exp(it_kx)z_k|^2\, d\mu(x)$$

レビーの反転定理

定理 12.2 $\underline{\mu}(t)$ をボレル確率測度 μ の特性関数とする。
$-\infty<a\leqq b<\infty$ とし $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$ とする。このとき次式が成り立つ。(このとき端点は含めても含めなくても同じ)。

$$\mu((a,b))=\lim_{N\to\infty} 1/(2\pi)\int_{-N}^{N}\{(\exp(-ita)-\exp(-itb))/(it)\}\underline{\mu}(t)dt$$

次式が成り立つことに注意。

$x>0$ なら $\int_0^N dt\,\sin(tx)/t \to \pi\,\mathrm{sign}(x)/2.$

$$\int dx \int_{-N}^{N} dt\,\{(\exp(-ita))/(it)\}\exp(itx)\,f(x)$$

$$= 2\int dx \int_0^N dt\,\{\sin(t(x-a))/t\}\,f(x)$$

$$\to \pi\int \mathrm{sign}(x-a)f(x)dx$$

特性関数の一意性

定理 12.3 $\underline{\mu}(t)$, $\underline{\nu}(t)$ をボレル確率測度 μ, ν の特性関数とする。

$$\forall t \in R,\ \underline{\mu}(t) = \underline{\nu}(t) \quad ならば \quad \mu = \nu$$

$\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$ のときはレビーの反転定理から成立する。

一般に $\mu(\{a\})>0$ となるような a の集合は高々可算個。

独立性と特性関数

定理 12.4 確率変数 XとYが独立であることと

$$\forall s,t \in \mathbf{R},\quad E[\exp(itX+isY)]=E[\exp(itx)]E[\exp(isY)]$$

が成り立つことは同値。3個以上の場合も同様。

定理 12.5 確率変数 X について$E[|X|^k]<\infty$とする。
このとき特性関数 $\phi(t)=E[\exp(itX)]$はtについてk階連続微分可能で

$$E[X^k]= (i)^k[d^k\phi(t)/dt^k]_{t=0}$$

が成り立つ。

定理12.6　省略。

第3章　　　13．法則収束

法則収束(分布収束)

定義 確率変数の列$\{X_n\}$がXに法則収束するとは

任意の有界連続関数 f について

$$E[f(X_n)] \to E[f(X)]$$

が成り立つことである。

◎　実は任意の一様有界連続関数について上記が成り立てば十分である。
◎ 各XnやXは同じ確率空間上に定義されている必要はない。
◎　$\{X_n\}$がXに法則収束するとき、非有界な関数について$E[f(X_n)] \to E[f(X)]$が成り立つためには追加条件が必要。

法則収束とその他の収束

定理13.1 確率変数の列$\{X_n\}$がXに確率収束すれば法則収束する。

◎概収束あるいは平均収束すれば確率収束し、
確率収束すれば法則収束する。

法則収束と特性関数

定理13.2　確率変数の列$\{X_n\}$がXに法則収束することと特性関数の列がある特性関数に各点収束することは同値である。

定理13.3　特性関数の列が原点の近傍で一様収束すれば収束先の関数はある確率分布の特性関数である。

（注意）特性関数の列が収束しても収束先は特性関数でない場合があり、そのときは法則収束は成り立たない。原点の近傍で一様収束すれば収束先は特性関数である。

ボホナーの定理

定理 13.4　R上の複素数値関数$\phi(t)$が次の式を満たすとする。

(1)　$\phi(t)$は **R** 上連続.

(2) 任意の $t_1,t_2,\cdots,t_n \in$ **R** と任意の $z_1,z_2,\cdots,z_n \in$ **C** について

$$\sum_{k,l} \phi\ (t_k - t_l)\ z_k (z_l)^* \geqq 0.$$

(3)　$\phi(0)=1$.

このとき$\phi(t)$を特性関数とするボレル確率測度が一意に存在する。

中心極限定理

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$を前頁と同じとし、有限な $E[X_i]=m$ と $V[X_i]=\sigma^2$ を持つとする。確率変数 $Z_n(\omega)$ を次式で定義する。

$$Z_n(\omega) = (1/(\sigma n^{1/2})) \sum_{i=1}^{n} \{ X_i(\omega) - m \}.$$

定理．Z_n の確率分布は平均0分散1の正規分布に収束する。

平均0分散1の正規分布は $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}).$

注意。確率分布の収束は次の意味である。同値な命題は多数ある。

$$Q(\{\omega;\, a < Z_n(\omega) < b\}) \to \int_a^b g(x)\,dx$$