はじめての確率論

測度から確率へ

佐藤　坦著

3章11節　セミナー資料

藤村　光

目次

目次

- 11.1　ポーランド空間
- 11.2　ラドン確率測度
- 11.3　確率測度列の弱収束

ポーランド空間とは、
完備な可分距離空間

・可分距離空間
・ポーランド空間

可分距離空間とは

可分距離空間とは、可算な稠密部分集合(稠密可算部分集合)を持つ距離空間。

距離空間$E = (E, d)$の部分集合DがEで稠密とは、

任意の $x \in E$ と 任意の $\epsilon > 0$について、ある$\xi \in D$で$\xi \in U(x, \epsilon)$となるものが存在することをいう。ただし、

$$U(x, \epsilon) = \{y \in E: d(x, y) < \epsilon\}$$

と定義する。

例11.1)

有理数全体 $\mathbb{Q}$:実数空間 $\mathbb{R}$上の稠密可算部分集合

補題11.1（p132）

$D=\{\xi_k : k\in\mathbb{N}\}$を距離空間 Eの稠密可算部分集合とする。このとき任意の$\epsilon>0$について

$$E=\cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k,\epsilon)$$

（証明）

・$E \subset \cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k,\epsilon)$

任意の$x\in E$に対して、Dは稠密なので、ある$\xi_i\in D$で$\xi_i\in U(x,\epsilon)$を満たすとする。このとき、$x\in U(\xi_i,\epsilon)$と表すことができるので、

$$x \in \cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k,\epsilon)。$$

・$\cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k,\epsilon)\subset E$　同様に示せる。

以上より、

$$E=\cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k,\epsilon)$$

□

ポーランド空間

ポーランド空間とは、完備な可分距離空間

例11.2）d次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^d$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d), y = (y_1, y_2, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d$に対して距離$d$を

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}$$

を定義する。

・完備距離空間

$\mathbb{R}^d$が距離dについて、
完備距離空間であることはよく知られている。

・可分距離空間

$$D = \{r = (r_1, r_2, \cdots, r_d) \in \mathbb{R}^d : r_1, r_2, \cdots, r_d \text{はすべて有理数}\}$$

と定義すると、Dは$\mathbb{R}^d$の稠密可算部分集合である。

以上より、$\mathbb{R}^d$はポーランド空間。

目次

補題11.2(p135)

μを距離空間E上のボレル確率測度とする。このとき、任意の$A \in \mathcal{B}(E)$について

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(G) : A \subset G \text{かつ} G \text{は} E \text{の開部分集合}\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \subset A \text{かつ} F \text{は} E \text{の閉部分集合}\}\end{aligned}$$

（証明）

$$\mathcal{B}_0 \equiv \left\{ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(E) : \begin{array}{l} \text{任意の} \epsilon > 0 \text{に対して} F \subset A \subset G \text{かつ} \\ \mu(G - F) < \epsilon \text{となるような} \\ \text{E の開部分集合 G と閉部分集合 F が存在する} \end{array} \right\}$$

と定義すると、$\mathcal{B}_0$はE上のσ-集合体であることが示される。

つぎにGをEの任意の開部分集合 、

$$F_n = \{x \in E : d(x, G^C) \geq 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と定義すると、F_nは閉部分集合 かつ $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$

また、$G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$であるから、単調連続性(p22)より、

$$\mu(G) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n).$$

ゆえに、$\mathcal{B}_0$はすべて開部分集合を含み、

$\mathcal{B}(E)$の最小性から$\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{B}_0$となるので、補題が成立する。

□

補題11.3(p135)

μ, νを距離空間$E = (E, d)$上のボレル確率測度で、任意の有界一様連続関数 f について

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x)\mathrm{d}\nu(x)$$

であれば$\mu = \nu$

（証明）

まず、Eの任意の閉部分集合Fについて、$\mu(F) = \nu(F)$を示す。

$$F_n = \{x \in E : d(x, F) \geq 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と定義すると、$d(x, F)$の連続性から、各F_nは閉部分集合。

次に、

$$f_n = \frac{d(x, F_n)}{d(x, F) + d(x, F_n)}, \quad x \in E, n \in \mathbb{N}$$

と定義すると、f_nは有界一様連続関数であり、

$x \in F$のとき、$f_n(x) = 1$、$x \in F_n$のとき、$f_n(x) = 0$

また、

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \mathbf{I}_F(x), \quad x \in E \quad \cdots ①$$

①より

$$\mu(F) = \int_E \mathbf{I}_F(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

仮定より

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}\nu(x)$$

有界収束定理
(p66)

$$= \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) \mathrm{d}\nu(x) = \int_E \mathbf{I}_F(x) \mathrm{d}\mu(x) = \nu(F) \quad \cdots ②$$

次に一般の$A \in \mathcal{B}(E)$について補題11.2より、

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A \text{ かつ } F\text{は}E\text{の閉部分集合}\}$$

$$= \sup\{\nu(F) : F \subset A \text{ かつ } F\text{は}E\text{の閉部分集合}\} = \nu(A)$$

②より

□

ラドン確率測度

距離空間E上のボレル確率測度μが任意の$A \in \mathcal{B}(E)$について

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ かつ } K\text{は}E\text{のコンパクト部分集合}\}$$

を満たすときにラドン確率測度という。

定理11.1

$E = (E, d)$をポーランド空間とする。このときE上の任意のボレル確率測度はラドン確率測度である。

（証明）

（第一段階）

まず、任意の$\epsilon > 0$に対して、Eのあるコンパクト部分集合$K(\epsilon)$で$\mu(K(\epsilon)^C) < \epsilon$となるものが存在することを示す。

Eはポーランド空間であるから、稠密可算部分集合$D = \{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$が存在する。補題11.1により任意の$n \in \mathbb{N}$について

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k, 1/n)。$$

次に一般の$A \in \mathcal{B}(E)$について単調連続性（p22）より、

$$\lim_{N \to \infty} \mu(\cup_{k=1}^{N} U(\xi_k, 1/n)) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} U(\xi_k, 1/n)) = \mu(E) = 1$$

したがって、ある$N(n) \in \mathbb{N}$で

$$\mu(\cup_{k=1}^{N(n)} U(\xi_k, 1/n)) > 1 - \epsilon/2^n \quad \cdots①$$

となるものが存在する。ここで

$$K(\epsilon) \equiv \cap_{n=1}^{\infty} \overline{\cup_{k=1}^{N(n)} U(\xi_k, 1/n)}$$

と定義すると、$K(\epsilon)$はEの閉部分集合であるから、例題15.3(p177)から、完備。他方から明らかに全有界であるから、定理15.1(p180)より、コンパクト。

このとき、

$$
\begin{aligned}
\mu(K(\epsilon)^C) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty}\overline{\{\cup_{k=1}^{\infty}U(\xi_k,1/n)\}}^C) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{\cup_{k=1}^{\infty}U(\xi_k,1/n)\}^C) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}1-\mu(\{\cup_{k=1}^{\infty}U(\xi_k,1/n)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

劣加法性
(p20)より

①より

<u>（第二段階）</u>

$A \in \mathcal{B}(E)$とする。補題11.2より、任意の$\epsilon > 0$に対して、あるAに含まれるEの閉部分集合Fで、$\mu(A - F) < \epsilon/2$となるものが存在する。

ここで、$K \equiv F \cap K(\epsilon/2)$と定義すると、$K \subset F \subset A$かつ

$$
\begin{aligned}
\mu(A - K) &= \mu(A - F) + \mu(F - K) \\
&= \epsilon/2 + \mu(K(\epsilon/2)^C) \\
&\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}
$$

②より

$\square$

目次

連続集合

μを距離空間$E = (E, d)$上のボレル確率測度とする。

$A \in \mathcal{B}(E)$について、
$\bar{A}$: Aの閉包、$\mathring{A}$: Aの内部

$$\partial A = \bar{A} - \mathring{A} : A\text{の境界集合}$$

特に$\mu(\partial A) = 0$の時に、Aをμ-連続集合

例）
- μを$\mathbb{R}$上のガウス測度$N(0,1)$とすると、任意の区間でμ-連続集合
- 有理数全体$\mathbb{Q}$は、μ-連続集合ではない

確率測度列の弱収束

<u>定義</u>

E上のボレル確率測度の列$\{\mu_n\}$がE上のボレル確率測度μに**弱収束**するとは、E上の任意の有界連続関数fについて

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\mathrm{d}\mu_n(x)$$

<u>表記</u>

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\mu_n$$

定理11.2(p137)

$\{\mu_n\}$を距離空間$E = (E, d)$上のボレル確率測度列、μを距離空間$E = (E, d)$上のボレル確率測度　とする。このとき次の五条件は同値である。

(1) $\{\mu_n\}$は μ に弱収束する

(2) 任意の有界一様連続関数fについて

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mathrm{d}\mu_n(x)$$

(3)Eの任意の閉部分集合Fについて

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

(4) Eの任意の閉部分集合Gについて

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

(5)任意のμ-連続集合$A \in \mathcal{B}(E)$について

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

<u>（証明）</u>

<u>（1）⇒（2）</u>明らか

<u>（2）⇒（3）</u>

FをEの任意の閉部分集合とする。任意の$m \in \mathbb{N}$について、

$$F_m \equiv \{x \in E : d(x,F) \geq 1/m\}$$

と定義すると、$d(x,F)$の連続性からF_mもEの閉部分集合。ここで、

$$f_m \equiv \frac{d(x,F_m)}{d(x,F)+d(x,F_m)}, \qquad x \in E$$

と定義するとf_mは有界一様連続関数であり、

$$0 \leq \mathbf{I}_F \leq f_m \leq 1, \qquad \mathrm{x} \in E \quad \cdots ①$$

また、$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = \mathbf{I}_F(x), \quad x \in E$である。

$$\mu(F) = \int_E \mathbf{I}_F(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

有界収束定理(p66)

$$= \int_E \lim_{m\to\infty} f_m(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad \cdots ②$$

他方、任意の$m \in \mathbb{N}$について仮定(2)より、

$$\int_E f_m(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_m(x)\mathrm{d}\mu_n(x)$$

①より

$$\geq \limsup_{n\to\infty}\int_E \mathbf{I}_F(x)\mathrm{d}\mu_n(x) = \limsup_{n\to\infty}\mu_n(F) \quad \cdots ③$$

③の両辺を$m \to \infty$すると、②から

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F) \leq \mu(F)$$

(3)が示された。

（3）⇒（4）

GをEの任意の開部分集合とすると、G^Cは閉部分集合である。

仮定(3)より、

$$\mu(G) = 1 - \mu(G^C) \leq 1 - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(G^C) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G)$$

（4）が示された。

（4）⇒（3）　同様に示せる。

(3)と(4)⇒(5)

任意のμ-連続集合$A \in \mathcal{B}(E)$について、$\mu(\bar{A}) = \mu(A) = \mu(A)$であるから、

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\bar{A})$$

仮定(3)より

$$\leq \mu(\bar{A}) = \mu(A) = \mu(\mathring{A})$$

仮定(4)より

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{A}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

よって、

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

(5)⇒(1)

fを任意の有界連続関数とする。ここで、

$$M \equiv \sup_{x \in E} |f(x)| + 1 < +\infty$$

$$F(\alpha) \equiv \mu(x \in E : f(x) \leq \alpha), \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

と定義すると、

$\alpha < -M$であれば、$F(\alpha) = 0$、$\alpha > M$であれば、$F(\alpha) = 1$

$F(\alpha)$は単調非減少関数であるから、

命題14.3(p170)より、不連続点は高々可算個しかない。

したがって、任意の$\epsilon > 0$に対して関数$F(\alpha)$の不連続点$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$で

$$-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p = M$$

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} < \epsilon, \;\; k = 1, 2, \cdots, p \quad \cdots ④$$

となるものが存在する。このとき集合

$$A_k \equiv \{x \in E : \alpha_{k-1} < f(x) \leq \alpha_k\}, \;\; k = 1, 2, \cdots, p$$

はすべてμ-連続集合であり、$A_k \cap A_l = \emptyset \; k, l = 1,2, \cdots, p$, $\cup_{k=1}^{p} A_k = E$となる。したがって、仮定(5)より

$$\mu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(A_k), \;\; k = 1, 2, \cdots, p$$

他方$g(x)=\sum_{k=1}^{p}\alpha_{k-1}\mathbf{I}_{A_k}(x),x\in E$と定義すると、
任意の$n\in\mathbb{N}$について

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_E g(x)\mathrm{d}\mu_n(x)\right|\le\int_E|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$

$$\le\sum_{k=1}^{p}\int_{A_k}|\alpha_k-\alpha_{k-1}|\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$

④より

$$\le\epsilon\sum_{k=1}^{p}\mu_n(A_k)=\epsilon\quad\cdots⑤$$

同様に

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)-\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|\le\epsilon\quad\cdots⑥$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E g(x)\mathrm{d}\mu_n(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{k-1}\left\{\mu(A_k(x)) - \mu_n(A_k(x))\right\}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} |\alpha_{k-1}|\,|\mu(A_k(x)) - \mu_n(A_k(x))| \\
&\leq \epsilon \quad \cdots ⑦ \quad (\because \text{仮定(5)より})
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$
\left|\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E f(x)\mathrm{d}\mu_n(x)\right| \leq \left|\int_E (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\mu(x)\right|
$$

$$
+\left|\int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E g(x)\mathrm{d}\mu_n(x)\right| + \left|\int_E (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right| \leq 3\epsilon
$$

（∵ ⑤～⑦より）

となり、(1)が示された。 $\square$

<u>定理11.3(プロホロフの定理)</u>

ポーランド空間E上のボレル確率測度列$\{\mu_n\}$がプロホロフの条件:

$$\begin{cases} \text{任意の}\epsilon > 0\text{に対して、ある}E\text{のコンパクト部分集合}K\text{で} \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(K) \geq 1-\epsilon\text{となるものが存在する。} \end{cases}$$

を満たせば$\{\mu_n\}$のある部分列$\{\mu_{n(k)}\}$はE上のあるボレル確率測度列に弱収束する。